دفترچهٔ پاسخ

آزمـــــون

۵ مرداد ماه ۹۷

(پروژهٔ تابستان)

فارغ‌التحصیلان ریاضی

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی « وقف عام»

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین – پلاک ۹۲۳ – تلفن: ۶۴۶۳-۰۲۱

«تمام دارایی‌ها و درآمدهای بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی وقف عام است بر گسترش دانش و آموزش»

ریاضی ۲

۱۰۱- *(بهرام طالبی)*

از تساوی $|x|+|y|=۲$ ؛ $x , y \in Z$ ، می‌توان نتیجه گرفت که مجموع دو عدد صحیح نامنفی برابر ۲ شده است و این در صورتی امکان‌پذیر است که یکی از حالات زیر رخ دهد:

$$|x|=۰ \ , \ |y|=۲ \ \to \ (۰,۲),(۰,-۲)\in R$$

$$|x|=۱ \ , \ |y|=۱ \to (۱,۱),(-۱,-۱),(-۱,۱),(۱,-۱)\in R$$

$$|x|=۲ \ , \ |y|=۰ \ \to \ (۲,۰),(-۲,۰)\in R$$

پس رابطه‌ی R دارای ۸ عضو زوج مرتب است.

(ریاضی ۲- تابع: صفحه‌های ۲۶ تا ۳۶)

۱۰۲- *(هادی پلاور)*

در نمودار گزینه‌ی «۳» هرخط به موازات محور yها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

(ریاضی ۲- تابع: صفحه‌های ۲۶ تا ۳۶)

۱۰۳- *(حسین ابراهیم‌نژاد)*

راه حل اول: $f(x)+xf(-x)=x^۲+۱$

اگر در رابطه‌ی فوق x را به $-x$ تبدیل کنیم رابطه‌ی دیگری به دست می‌آید که می‌توان به کمک آن $f(۲)$ را به دست آورد.

$$x\to -x \begin{cases} f(x)+xf(-x)=x^۲+۱ \\ f(-x)-xf(x)=x^۲+۱ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{پایینی را در } -x} \begin{cases} f(x)+xf(-x)=x^۲+۱ \\ -xf(-x)+x^۲f(x)=-x^۳-x \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)+x^۲f(x)=x^۲-x^۳-x+۱$$

$$\Rightarrow (x^۲+۱)f(x)=x^۲-x^۳-x+۱$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{-x^۳+x^۲-x+۱}{x^۲+۱}$$

$$\Rightarrow f(۲)=\frac{-۸+۴-۲+۱}{۴+۱}=\frac{-۵}{۵}=-۱$$

راه حل دوم:

مقادیر $x=۲$ و $x=-۲$ را در رابطه‌ی داده شده قرار می‌دهیم:

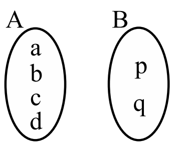
$$\begin{cases} x=۲\Rightarrow f(۲)+۲f(-۲)=۴+۱=۵ \quad (۱) \\ x=-۲\Rightarrow f(-۲)-۲f(۲)=۵ \\ \xrightarrow[\text{ضرب}]{\text{در } -۲} -۲f(-۲)+۴f(۲)=-۱۰ \quad (۲) \end{cases}$$

$$\xrightarrow[(۱),(۲)]{} f(۲)+۴f(۲)=۵-۱۰\Rightarrow ۵f(۲)=-۵$$

$$\Rightarrow f(۲)=-۱$$

(ریاضی ۲- تابع: صفحه‌های ۴۱ تا ۵۴)

۱۰۴- *(محمدرضا شوکتی‌بیرق)*



می‌دانیم در نمودار پیکانی یک تابع باید از همه‌ی اعضای مجموعه‌ی A (مبدأ) دقیقاً یک پیکان خارج شود،

برای عضوی مانند a دو انتخاب جهت اتصال به B داریم (p یا q)، به همین ترتیب برای b، c و d نیز ۲ انتخاب داریم. بنابراین:

$$۱۶=۲^۴=۲\times۲\times۲\times۲=\text{کل حالت‌ها}$$

(ریاضی ۲- تابع: صفحه‌های ۲۶ تا ۳۶)

۱۰۵- (حمید علیزاده)

از آنجا که دامنه‌ی تابع f، $R-\{0\}$ است، دامنه‌ی تابع $g(x)=(f(\sqrt{x}))^2-f(x)$ به خاطر وجود $\sqrt{x}$، فاصله‌ی $(0,+\infty)$ است. حال با توجه به ضابطه‌ی f، ضابطه‌ی $f(\sqrt{x})$ را می‌یابیم:

$$f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}\Rightarrow f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^2+\frac{1}{(\sqrt{x})^2}$$

$$=x+\frac{1}{x}\quad (*)$$

بنابراین ضابطه‌ی g به صورت زیر خواهد بود:

$$g(x)=(f(\sqrt{x}))^2-f(x)\overset{(*)}{=}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=x^2+\frac{1}{x^2}+2(x)\left(\frac{1}{x}\right)-x^2-\frac{1}{x^2}=2$$

$$\Rightarrow g(x)=2\ ,\ x\in(0,+\infty)$$

پس تابع g یک تابع ثابت است.

(ریاضی ۲- توابع خاص، نامعادله و تعیین علامت؛ صفحه‌های ۵۶ تا ۵۸)

۱۰۶- (کورش شاه‌منصوریان)

$$f(x)=x^2(2-x)^2$$

$$f(1+x)=(1+x)^2(2-1-x)^2=(1+x)^2(1-x)^2$$

$$f(1-x)=(1-x)^2(2-1+x)^2=(1-x)^2(1+x)^2$$

$$\Rightarrow f(1+x)-f(1-x)=0$$

(ریاضی ۲- تابع؛ صفحه‌های ۴۹ تا ۵۴)

۱۰۷- (وحید جوادی‌فر)

کافیست جای x و y را در گزینه‌ها عوض کرده هر کدام روی تابع f قرار داشت، جواب است. که فقط گزینه‌ی (۳) قابل قبول است.

$$(0\ ,\ 1)\in f\Rightarrow(1\ ,0)\in f^{-1}$$

(ریاضی ۲- تابع؛ صفحه‌های ۴۱ تا ۴۶)

۱۰۸- (محمدرضا اسلامی)

فرض کنید مجموعه‌ی دامنه $\{a\}$ و برد تابع را با اعداد طبیعی نمایش دهیم، در این حالت، رابطه‌ی R به صورت زیر خواهد بود که تابع نیست.

$$R=\{(a,1),(a,2),(a,3),...\}$$

(ریاضی ۲- تابع؛ صفحه‌های ۲۶ تا ۳۶)

۱۰۹- (سراسری ریاضی- ۸۷)

برای آنکه رابطه‌ی A یک تابع باشد، باید در آن هیچ دو زوج مرتب متمایزی، مؤلفه‌ی اول برابر نداشته باشند،بنابراین:

$$(3,m^2)=(3,m+2)\Rightarrow m^2=m+2\Rightarrow m^2-m-2=0$$

$$\Rightarrow(m-2)(m+1)=0\Rightarrow m=2\ ,\ m=-1$$

با جاگذاری این مقادیر m و تشکیل رابطه داریم:

$$m=-1\Rightarrow\{(3,1),(2,1),(-3,-1),(-2,-1),(3,1),(-1,4)\}$$

تابع است.

$$m=2\Rightarrow\{(3,4),(2,1),(-3,2),(-2,2),(3,4),(2,4)\}$$

تابع نیست. پس فقط $m=-1$ قابل قبول است.

(ریاضی ۲- تابع؛ صفحه‌های ۲۶ تا ۳۶)

۱۱۰- (هادی پلاور)

اعداد	مقسوم علیه‌ها	
۱	۱	$(1,1)$
۲	۱ ، ۲	$(2,1),(2,2)$
۳	۱ ، ۳	$(3,1),(3,3)$

$$R=\{(1,1),\underline{(2,1)},\underline{(2,2)},\underline{\underline{(3,1)}},\underline{\underline{(3,3)}}\}$$

با توجه به رابطه‌ی بالا، با حذف ۲ زوج مرتب، R به یک تابع تبدیل می‌شود.

(ریاضی ۲- تابع؛ صفحه‌های ۲۶ تا ۳۶)

حسابان

-۱۱۱ (میرهادی سرکارفرشی)

برای محاسبه‌ی دامنه‌ی عبارت رادیکالی با فرجه‌ی زوج بایـد عبـارت زیـر رادیکال نامنفی باشد. بنابراین:

$$xf(x) \geq ۰ \quad (*)$$

از آنجا که نمودار تابع f در $x = ۱$، $x = -۳$ و $x = ۲$ صفر شده، جدول تعیین علامت عبارت فوق به‌صورت زیر خواهد بود:

	−۴ تا −۳	−۳ تا ۰	۰ تا ۱	۱ تا ۲
x	−	−	+	+
$f(x)$	+	−	−	+
$xf(x)$	−	+	−	+

پس مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $(*)$ و در نتیجه دامنه‌ی عبارت داده شـده برابر است با:

$$x \in [-۳,۰] \cup [۱,۲]$$

(حسابان-تابع: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

-۱۱۲ (محمدرضا اسلامی)

می‌دانیم $۰ \leq u - [u] < ۱$ ، $\forall u \in R$ پس:

$$f(x) = ۲(x - [x]) + ۱$$

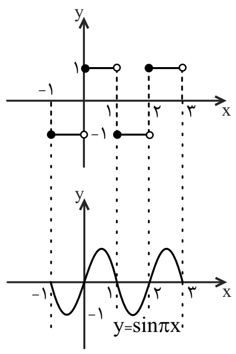
چـــون $۰ \leq x - [x] < ۱$ لـــذا $۰ \leq ۲(x - [x]) < ۲$ لـــذا $۱ \leq ۲(x - [x]) + ۱ < ۳$ پس:

$$R_f = [۱ , ۳)$$

(حسابان-تابع: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

-۱۱۳ (هادی پلاور)

به نمودار تابع $y = (-۱)^{[x]}$ توجه کنید:



چون در تساوی $|f(x)| = (-۱)^{[x]} f(x)$ طرف راسـت تسـاوی همـواره نامنفی است پس برای برقرار بودن تساوی، باید طرف چپ نامنفی باشد.
پس باید f طوری انتخاب شود کـه در هـر زیـر فاصـله بـه طـول یـک بـا تابع $y = (-۱)^{[x]}$ هم‌علامت باشد.

در مورد تابع گزینه‌ی «۱» همان طور که در شکل بالا می‌بینید در هر زیر فاصله مقادیر دو تابع با هم، هم‌علامت هستند.
بنابراین $f(x) = \sin \pi x$ قابل قبول است.

(حسابان-تابع: صفحه‌های ۴۸ و ۴۹)

-۱۱۴ (محمدمهدی وزیری)

در گزینـــه‌ی (۱): بـــا فـــرض $x = -۲$ در رابطـــه، بـــه معادلـــه‌ی $\sqrt{y + ۲} = y + ۲$ می‌رسیم، که دو جواب دارد. از آن جایی کـه بـه ازای $x = -۲$ دو مقدار برای y به دست آمده،پس این رابطه، یک تابع نیست.
در گزینـــه‌ی (۲): بـــا فـــرض $x = ۱$ در رابطـــه، بـــه معادلـــه‌ی $y^۳ - ۴y = ۰$ می‌رسیم، خواهیم داشت:

$$y^۳ - ۴y = ۰ \Rightarrow y(y^۲ - ۴) = ۰ \Rightarrow y = ۰ , y = ۲ , y = -۲$$

از آن جایی که به ازای $x = ۱$ سه مقدار برای y به دست آمده، پس این رابطه، یک تابع نیست.
در گزینـــه‌ی (۳): بـــا فـــرض $x = ۰$ در رابطـــه، بـــه معادلـــه‌ی $y + |۲y + ۱| = ۰$ می‌رسیم، با حل این معادله خواهیم داشت:

$$|۲y + ۱| = -y \xrightarrow{y \leq ۰} (۲y + ۱)^۲ = y^۲$$
$$\Rightarrow ۴y^۲ + ۴y + ۱ = y^۲ \Rightarrow ۳y^۲ + ۴y + ۱ = ۰$$

در این معادله $a + c = b$ است، پس :

$$y = -۱ \text{ و } y = \frac{-۱}{۳}$$

از آن جایی که به ازای $x = ۰$ دو مقدار برای y بـه دسـت آمـده،پس ایـن رابطه،یک تابع نیست.
در گزینه‌ی (۴): ابتدا با ضابطه بندی داریم:

$$x = y^۳ + y + |y| = \begin{cases} y^۳ + ۲y & y \geq ۰ \\ y^۳ & y < ۰ \end{cases}$$

که در هر حالت به ازای هر $x \in R$ فقط یک y حقیقی پیدا می‌شود.

(حسابان-تابع: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

-۱۱۵ *(بهار کریمی)*

ضابطه‌ی تابع f، برابر $f(x)=|x|$ است، برای یافتن g به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\text{۲ واحد به چپ}} f(x+2) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} -f(x+2)$$

$$\xrightarrow{\text{۳ واحد به پایین}} -f(x+2)-3$$

$$\xrightarrow{\text{با ضریب } \frac{1}{2} \text{ منبسط شود}} -\frac{1}{2}f(x+2)-3$$

بنابراین $g(x)=\frac{-1}{2}f(x+2)-3$.

(حسابان-تابع: صفحه‌های ۵۴ تا ۶۴)

-۱۱۶ *(سراسری ریاضی - ۷۹)*

با تعیین ضابطه‌ی gof خواهیم داشت:

$$y=(gof)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x})=\frac{2-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$$

$$y=\frac{2-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \Rightarrow y+y\sqrt{x}=2-\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}(1+y)=2-y \Rightarrow \sqrt{x}=\frac{2-y}{1+y}\geq 0$$

$$\Rightarrow -1<y\leq 2 \Rightarrow R_y=(-1\,,\,2]$$

(حسابان-تابع: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۶)

-۱۱۷ *(هادی پلاور)*

$$y=f(x)=ax+b \Rightarrow x=\frac{y-b}{a} \Rightarrow x=\frac{1}{a}y-\frac{b}{a}$$

$$f^{-1}(y)=\frac{1}{a}y-\frac{b}{a} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$$

$$f(x)=f^{-1}(x) \Rightarrow ax+b=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow (a-\frac{1}{a})x+(b+\frac{b}{a})=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-\frac{1}{a}=0 \Rightarrow a=\frac{1}{a} \Rightarrow a=\pm 1 & (1) \\ b+\frac{b}{a}=0 \Rightarrow b(\frac{a+1}{a})=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=0 \end{cases} & (2) \end{cases}$$

مشاهده می‌شود که اگر $a=-1$ باشد، شروط (۱) و (۲) همزمان برقرار می‌شوند.

(حسابان-تابع: صفحه‌های ۸۵ تا ۹۵)

-۱۱۸ *(امیر غلامی)*

اگر تابع f شامل زوج مرتب‌های $(x_1,f(x_1))$ و $(x_2,f(x_2))$ باشد، آنگاه:

۱) $f(x_1)\neq f(x_2) \Rightarrow x_1\neq x_2$

۲) $x_1=x_2 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$

در این سؤال با در نظر گرفتن زوج مرتب‌های $(x,4x-3)$ و $(x,3x-1)$ داریم: $x=x \Rightarrow 3x-1=4x-3 \Rightarrow x=2$

با جای‌گذاری $x=2$ در مجموعه داریم:

$$f=\{(2,5),(5,y),(2,5),(5,-2)\}$$

$$(5,y),(5,-2)\in f \Rightarrow y=-2$$

(حسابان-تابع: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

-۱۱۹ *(هادی پلاور)*

شرط صعودی بودن f آن است که بیش‌ترین مقدار تابع $y_2=2x+1$ کوچک‌تر یا مساوی کم‌ترین مقدار تابع $y_1=x+a$ باشد.

$$\begin{cases} x\geq 1 \Rightarrow x+a\geq 1+a \Rightarrow y_1\geq 1+a \\ x<1 \Rightarrow 2x+1<3 \Rightarrow y_2<3 \end{cases}$$

$$y_2\leq y_1 \Rightarrow 3\leq 1+a \Rightarrow a\geq 2$$

(حسابان-تابع: صفحه‌های ۷۶ تا ۹۵)

-۱۲۰ *(کوروش شاه‌منصوریان)*

راه حل اول: با فرض $y=f(x)$ داریم:

$$y=\frac{x^3+b}{a} \Rightarrow ay-b=x^3$$

$$\Rightarrow x=\sqrt[3]{ay-b} \xrightarrow[x=f^{-1}(y)]{y=f(x)} f^{-1}(y)=\sqrt[3]{ay-b}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{ax-b}\equiv\sqrt[3]{2x-3} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow a+b=5$$

راه حل دوم: به ازای هر x عضو دامنه‌ی f^{-1} داریم:

$$fo(f^{-1}(x))=x \Rightarrow \frac{(\sqrt[3]{2x-3})^3+b}{a}=x$$

$$\Rightarrow \frac{2x+b-3}{a}=x \Rightarrow 2x+b-3=ax$$

$$\Rightarrow (2-a)x+b-3=0 \Rightarrow \begin{cases} 2-a=0 \\ b-3=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow a+b=5$$

(حسابان-تابع: صفحه‌های ۸۵ تا ۹۵)

هندسه ۱

۱۲۱- (محمدابراهیم گیتی‌زاده)

می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع a، ارتفاع برابر $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ و مساحت برابر $\frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}$ است. داریم: $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}=۳\sqrt{۳}\Rightarrow a=۶$

$$S=\frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۳۶\sqrt{۳}}{۴}=۹\sqrt{۳}$$

(هندسه ۱ - مساحت و فیثاغورس: صفحه‌های ۶۱ و ۶۲)

۱۲۲- (حسن نصرتی ناهوک)

اگر a طول وتر و b و c، طول اضلاع زاویهٔ قائمه باشند، آن‌گاه با فرض $\frac{b}{c}=\frac{۳}{۴}$ داریم:

$$S=\frac{۱}{۲}bc=۲۴\Rightarrow\frac{۱}{۲}(\frac{۳}{۴}c)(c)=۲۴\Rightarrow c^{۲}=۶۴$$

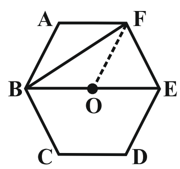
$$\Rightarrow c=۸\Rightarrow b=۶$$

$$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}=۶^{۲}+۸^{۲}=۱۰۰\Rightarrow a=۱۰$$

$$S=\frac{۱}{۲}a.h_a=۲۴\Rightarrow\frac{۱}{۲}(۱۰)h_a=۲۴\Rightarrow h_a=\frac{۲۴}{۵}=۴/۸$$

(هندسه ۱ - مساحت و فیثاغورس- مشابه تمرین ۷: صفحهٔ ۶۴)

۱۲۳- (رضا عباسی اصل)



از O (مرکز شش‌ضلعی) به F وصل می‌کنیم، داریم:

$$S_{BEF}=۳۲\sqrt{۳}\Rightarrow S_{OEF}=۱۶\sqrt{۳}$$

اگر طول ضلع شش ضلعی منتظم را برابر a فرض کنیم، آن‌گاه:

$$\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}=۱۶\sqrt{۳}\Rightarrow a^{۲}=۶۴\Rightarrow a=۸$$

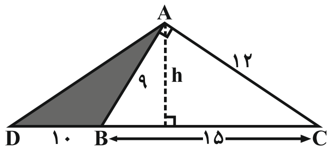
محیط شش‌ضلعی $=۶a=۶\times۸=۴۸$

(هندسه ۱ - مساحت و فیثاغورس: صفحه‌های ۶۲ و ۶۳)

۱۲۴- (رضا عباسی اصل)

مثلث ABC قائم‌الزاویه است، زیرا: $۱۵^{۲}=۱۲^{۲}+۹^{۲}$

پس: $S_{ABC}=\frac{۱}{۲}\times۹\times۱۲=۵۴$



مثلث‌های ABD و ABC دارای ارتفاع مشترکی هستند که از رأس A رسم می‌شود. پس نسبت مساحت‌هایشان با نسبت قاعده‌های متناظر مساوی است، حال:

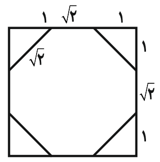
$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}}=\frac{BD}{BC}$$

$$\frac{S_{ABD}}{۵۴}=\frac{۱۰}{۱۵}$$

$$\Rightarrow S_{ABD}=۳۶$$

(هندسه ۱ - مساحت و فیثاغورس: صفحه‌های ۴۱، ۵۲ و ۶۱)

۱۲۵- (سروش موئینی)



مطابق شکل، اگر یک هشت ضلعی منتظم درون مربعی محاط شود، هر کدام از مثلث‌های به وجود آمده، قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین هستند. با توجه به این که وتر هر کدام از این مثلث‌ها برابر $\sqrt{۲}$ است، طول اضلاع قائمهٔ آن‌ها برابر ۱ و در نتیجه طول ضلع مربع برابر $۲+\sqrt{۲}$ خواهد شد. داریم:

طول قطر مربع $=\sqrt{۲}(۲+\sqrt{(۲)})=۲\sqrt{۲}+۲$

(هندسه ۱ - مساحت و فیثاغورس: صفحهٔ ۶۷)

-۱۲۶ (محمدابراهیم گیتی‌زاده)

$$\overset{\Delta}{MBC}: MC^2 = MB^2 - BC^2$$

$$\overset{\Delta}{MAD}: MD^2 = MA^2 - AD^2 = MA^2 - BC^2$$

$$CD^2 = (MC + MD)^2 = MC^2 + MD^2 + 2MC \times MD$$

$$\Rightarrow CD^2 = MB^2 - BC^2 + MA^2 - BC^2 + 2MC \times MD$$

$$\overset{\Delta}{MAB}: MA^2 + MB^2 = AB^2 = CD^2$$

$$CD^2 = CD^2 - 2BC^2 + 36 \Rightarrow BC^2 = 18 \Rightarrow BC = 3\sqrt{2}$$

(هندسه ۱ - مساحت و فیثاغورس؛ صفحه‌های ۵۷ تا ۵۹)

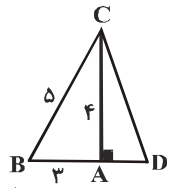
-۱۲۷ (محمدابراهیم گیتی‌زاده)

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow BC = BD = 5$$

$$AD = BD - AB = 5 - 3 = 2$$

$$\overset{\Delta}{ACD}: CD^2 = AC^2 + AD^2 = 4^2 + 2^2$$

$$\Rightarrow CD = 2\sqrt{5}$$



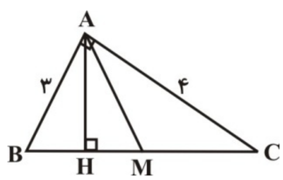
(هندسه ۱ - مساحت و فیثاغورس؛ صفحه‌های ۵۳ تا ۵۹)

-۱۲۸ (محمدطاهر شعاعی)

مثلث ABC به اضلاع ۳، ۴ و ۵، در رأس A قائم‌الزاویه است. میانهٔ نظیر وتر نصف وتر است، پس $AM = BM = CM = \frac{5}{2}$. از طرفی بنا به رابطهٔ طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 3^2 = BH \times 5 \Rightarrow BH = \frac{9}{5}$$

$$MH = BM - BH = \frac{5}{2} - \frac{9}{5} = \frac{25 - 18}{10} = \frac{7}{10} = 0/7$$



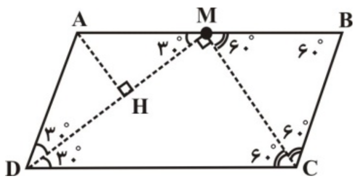
(هندسه ۱ - مساحت و فیثاغورس؛ صفحهٔ ۶۵)

-۱۲۹ (حمید کروسی)

با توجه به شکل زیر و رابطهٔ اجزای داده شده داریم:

$$\overset{\Delta}{AHM}: \hat{M} = 30^\circ \Rightarrow AH = \frac{1}{2}AM = 2$$

$$\Rightarrow HM^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow HM = 2\sqrt{3} \Rightarrow DM = 4\sqrt{3}$$



از آن جا که مثلث CMD قائم‌الزاویه است ($\widehat{CMD} = 90^\circ$)، داریم:

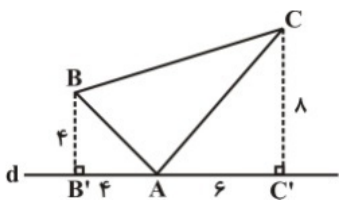
$$S(\overset{\Delta}{DMC}) = \frac{1}{2}(4\sqrt{3})(4) = 8\sqrt{3}$$

(هندسه ۱ - مساحت و فیثاغورس؛ صفحه‌های ۴۱ تا ۴۳ و ۶۵)

-۱۳۰ (مهرداد ملوندی)

باید مساحت ذوزنقهٔ $BB'C'C$ را یافته و مجموع مساحت‌های مثلث‌های ABB' و ACC' را از آن کم کنیم.

$$\begin{cases} S_{BB'C'C} = \frac{1}{2}(4+8) \times 10 = 60 \\ S_{ABB'} = \frac{4 \times 4}{2} = 8, S_{ACC'} = \frac{6 \times 8}{2} = 24 \end{cases}$$



$$\Rightarrow S_{ABC} = 60 - (8 + 24) = 28$$

(هندسه ۱ - مساحت و فیثاغورس؛ صفحه‌های ۴۱ تا ۵۰)

هندسه ۲

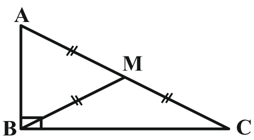
-۱۳۱ (محمدابراهیم گیتی‌زاده)

نقطه O از سه رأس مثلث به یک فاصله است. مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشند، عمودمنصف پاره‌خط AB است. بنابراین، باید نقطهٔ O روی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث ABC قرار داشته، یعنی نقطه همرسی عمودمنصف‌ها باشد.

(هندسه ۲ - استدلال: صفحهٔ ۳۵ - دایره: صفحهٔ ۵۸)

-۱۳۲ (رضا عباسی‌اصل)

در مثلث قائم‌الزاویه، نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها در وسط وتر واقع است. پس کافی است فاصلهٔ M از سه رأس مثلث را به‌دست آوریم.



$$\overset{\Delta}{ABC}: AC^{۲} = AB^{۲} + BC^{۲}$$

$$\Rightarrow [۲(a+۱)]^{۲} = (a+۲)^{۲} + (۲a)^{۲}$$

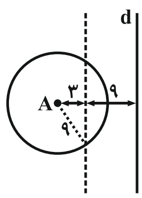
$$\Rightarrow a^{۲} - ۴a = ۰ \Rightarrow a = ۴ \Rightarrow AC = ۲\times۴+۲ = ۱۰$$

چون M پای میانه نظیر وتر است، داریم: $BM = \dfrac{AC}{۲} = ۵$

$$MB + MA + MC = ۵+۵+۵ = ۱۵$$

(هندسه ۲ - استدلال: صفحهٔ ۳۵)

-۱۳۳ (شروین سیاح‌نیا)



مکان هندسی نقاطی که از A به فاصلهٔ ۹ هستند، دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۹ می‌باشد و مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۹ قرار دارند، دو خط موازی d در طرفین آن است و محل تلاقی این دو خط با دایره جواب مسأله است که در این‌جا دقیقاً دو نقطه می‌باشد.

(هندسه ۲ - استدلال: صفحه‌های ۳۱ تا ۳۷)

-۱۳۴ (محسن محمدکریمی)

مرکز این دایره‌ها نقاطی هستند که فاصله‌های آن‌ها تا d، با فاصلهٔ آن‌ها تا d' برابر است. بنابراین همان نیمسازهای زوایای حاصل از برخورد d و d' را تشکیل می‌دهند که به‌صورت دو خط عمود بر هم می‌باشند.

(هندسه ۲ - استدلال: صفحه‌های ۳۱ تا ۳۷)

-۱۳۵ (محمدابراهیم گیتی‌زاده)

اگر دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ در دو نقطـهٔ متمـایز متقـاطع باشند، باید داشته باشیم: $|R-R'| < d < R+R'$

$$\Rightarrow (m+۷)-(m+۴) < ۳m-۴ < (m+۷)+(m+۴)$$

$$\Rightarrow ۳ < ۳m-۴ < ۲m+۱۱$$

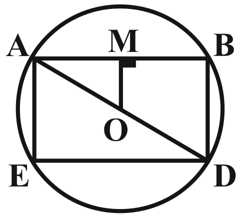
$$\Rightarrow ۷ < ۳m < ۲m+۱۵ \Rightarrow \begin{cases} ۷ < ۳m \Rightarrow \dfrac{۷}{۳} < m \\ ۳m < ۲m+۱۵ \Rightarrow m < ۱۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{۷}{۳} < m < ۱۵$$

(هندسه ۲ - دایره: صفحهٔ ۵۴)

-۱۳۶ (محمدابراهیم گیتی‌زاده)

کوتاه‌ترین وتری که از نقطهٔ M در دایره رسم می‌شود آن است که بر MO عمود باشد.



طبق تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABD داریم:

$$\frac{OM}{BD} = \frac{AO}{AD} \Rightarrow \frac{۶}{BD} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow BD = ۱۲$$

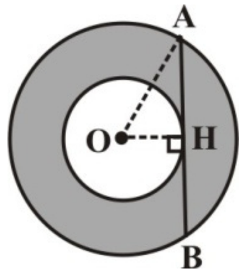
(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۰)

۱۳۷- (حمید کروسی)

اگر مساحت ناحیهٔ هاشورزده را با S نمایش دهیم، داریم:

$$AH = HB = \frac{1}{2}AB = 2 \Rightarrow S = \pi(OA)^2 - \pi(OH)^2$$

$$= \pi(OA^2 - OH^2) \Rightarrow S = \pi(AH)^2 = \pi(2)^2 = 4\pi$$

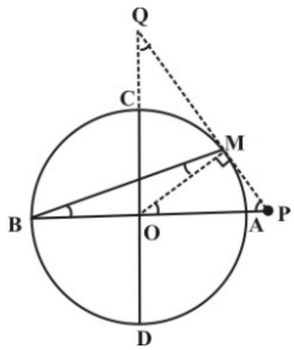


(هندسه ۲- دایره؛ مشابه تمرین ۱۱- صفحهٔ ۵۶)

۱۳۸- (داریوش ناظمی)

می‌دانیم شعاع در نقطهٔ تماس، بر خط مماس عمود است، پس داریم:

$$\overset{\Delta}{OMP} : \hat{P} = 70^\circ \Rightarrow M\hat{O}P = 20^\circ$$



از طرفی زاویهٔ MOP، زاویهٔ خارجی برای مثلث OMB است، همچنین OM = OB، بنابراین:

$$O\hat{M}B = O\hat{B}M = \frac{M\hat{O}P}{2} = 10^\circ$$

$$\Rightarrow Q\hat{M}B = 90^\circ - 10^\circ = 80^\circ$$

(هندسه ۲ – دایره؛ صفحه‌های ۴۷ تا ۵۱)

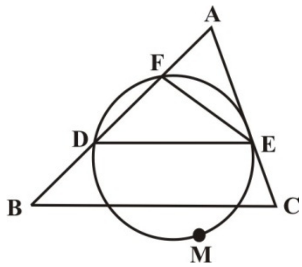
۱۳۹- (نوید مجیدی)

$$D\hat{F}E = D\hat{E}C = \frac{\overset{\frown}{DME}}{2} \qquad (1)$$

$$DE \parallel BC \Rightarrow D\hat{E}C + E\hat{C}B = 180^\circ \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow D\hat{F}E + E\hat{C}B = 180^\circ$$

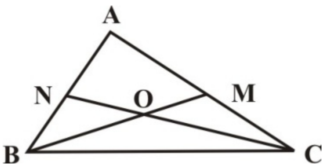
پس چهارضلعی FECB محاطی است.



(هندسه ۲ – دایره؛ صفحه‌های ۵۸ و ۵۹)

۱۴۰- (امیرحسین ابومحبوب)

در مثلث ABC فرض می‌کنیم BC = ۱۲ ، BM = ۸ و CN = ۱۰ باشد. با توجه به ویژگی همرسی میانه‌ها داریم:



$$BO = \frac{2}{3}BM = \frac{16}{3}, CO = \frac{2}{3}CN = \frac{20}{3}$$

برای رسم مثلث OBC، لازم است نامساوی مثلثی در آن برقرار باشد، داریم:

$$BO + CO > BC \Rightarrow \frac{16}{3} + \frac{20}{3} > 12 \Rightarrow 12 > 12$$

چون رابطه برقرار نیست، پس چنین مثلثی قابل رسم نمی‌باشد.

(هندسه ۲ – استدلال؛ مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۴۲)

جبر و احتمال

-۱۴۱ (سروش موثینی)

از شرط $\{\{1\},\{2\}\} = \{a,\{a-b\}\}$ داریم:

$$a = 1, a-b = 2 \Rightarrow b = -1$$

حالا مجموعهٔ جدید با مقادیر $b = -1$ و $a = 1$ ساخته می‌شود:

$$\{a,b,a^2,b^2\} = \{1,-1,1,1\}$$

بنابراین مجموعهٔ مورد نظر، دارای ۲ عضو است.

(جبر و احتمال – مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۶)

-۱۴۲ (رضا پورحسینی)

گزینهٔ «۱» صحیح است. زیرا یک زیرمجموعهٔ دو عضوی از A شامل اعضای a و $\{a\}$ است.

گزینهٔ «۲» صحیح است. زیرا یک زیرمجموعهٔ تک عضوی از A شامل عضو $\varnothing$ است.

گزینهٔ «۳» نادرست است. زیرا عضو $\{\{a\},\varnothing\}$ در A وجود ندارد.

گزینهٔ «۴» صحیح است. زیرا $\{a,\{a\}\}$ عضوی از مجموعهٔ A است.

(جبر و احتمال – مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۹)

-۱۴۳ (علیرضا شریف‌خطیبی)

مجموعهٔ جدید، ۵ عضوی می‌شود و 2^5 زیرمجموعه دارد و تعداد زیرمجموعه‌های شامل عضو a، مطابق اصل ضرب برابر است با $16 = 2^4$، زیرا برای a، یک حالت و برای هر کدام از اعضای b، $\{a\}$، $\{b\}$ و $\{a,b\}$ دو حالت وجود دارد.

(جبر و احتمال – مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

-۱۴۴ (رضا پورحسینی)

$$\left.\begin{aligned} A_2 &= [\tfrac{1}{2},2] \\ A_3 &= [\tfrac{1}{3},3] \\ A_4 &= [\tfrac{1}{4},4] \\ &\vdots \\ A_n &= \lim_{n\to\infty}[\tfrac{1}{n},n] \end{aligned}\right\} \Rightarrow \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n = (0,+\infty)$$

(جبر و احتمال – مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

-۱۴۵ (سیدعادل‌رضا مرتضوی)

$$B - A' \subseteq A' \cup B' \Rightarrow B \cap A \subseteq (A \cap B)'$$

واضح است که یک مجموعه نمی‌تواند زیرمجموعهٔ متمم خود باشد، مگر آن‌که آن مجموعه، تهی باشد.

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow \begin{cases} A \subseteq B' \Rightarrow A \cap B' = A \\ B \subseteq A' \Rightarrow A' \cup B = A' \end{cases}$$

$$(A-B)-(A' \cup B) = (A \cap B') - (A' \cup B)$$

$$= A - A' = A \cap A = A$$

(جبر و احتمال – مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۴۴ تا ۵۲)

-۱۴۶ (شروین سیاح‌نیا)

با توجه به اینکه در مجموعهٔ B داریم: $B = \{8k+1 \mid k \in A\}$ و اعضای A به‌صورت $7k+1$ هستند، $B = \{8(7k+1)+1 \mid k \in N\}$ یا $B = \{56k+9 \mid k \in N\}$.

اعضای مجموعه A بر ۷، باقیمانده‌ای برابر ۱ دارند ولی اعضای مجموعه B بر ۷، باقیمانده‌ای برابر ۲ دارند، پس B و A هیچ عضو مشترکی ندارند. بنابراین تعداد اعضای سه رقمی $(B-A)$ همان تعداد اعضای سه رقمی B است، لذا خواهیم داشت:

$$100 \le 56k+9 \le 999 \Rightarrow 91 \le 56k \le 990 \Rightarrow 2 \le k \le 17$$

پس به ازای $k = 2$ تا $k = 17$ رابطهٔ فوق برقرار بوده که این تعداد شامل ۱۶ عدد است.

(جبر و احتمال – مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۵۰ تا ۵۲)

-۱۴۷ (رسول محسنی‌منش)

$P(A)$، ۱۶ عضوی است که با A در دو عضو $\{a\}$ و $\{a,b\}$ مشترک است، پس $P(A)-A$ دارای ۱۴ عضو می‌باشد، در نتیجه دارای $۲^{۱۴}-۲$ زیرمجموعهٔ سرهٔ ناتهی است.

(جبر و احتمال – مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۳۶ تا ۴۰)

-۱۴۸ (سروش موئینی)

$$A\cup(A'-B')'=A\cup(A'\cap B)'$$

$$=A\cup(A\cup B')=(A\cup A)\cup B'=A\cup B'$$

و متمم این مجموعه، $A'\cap B$ یا همان $B-A$ است.

(جبر و احتمال – مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۴۴ تا ۵۲)

-۱۴۹ (علیرضا شریف‌خطیبی)

$$(A\cap B)-\left((A\cup B)\cap\left[\underbrace{B\cup(B\cap C)}_{B}\right]\right)$$

$$(A\cap B)-\left[\underbrace{(A\cup B)\cap B}_{B}\right]$$

$$=(A\cap B)-B=\varnothing$$

نکته: طبق قاعدهٔ جذب $B\cup(B\cap C)=B$ و $(A\cup B)\cap B=B$ است.

(جبر و احتمال – مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۴۴ تا ۵۲)

-۱۵۰ (امیرحسین ابومحبوب)

حداکثر تعداد اعضای B زمانی است که $A\subseteq B$ و در نتیجه

$$|A\Delta B|=|B|-|A|\Rightarrow \max|B|=۱۲$$

حداقل تعداد اعضای B زمانی است که $B\subseteq A$ و در نتیجه

$$|A\Delta B|=|A|-|B|\Rightarrow \min|B|=۲$$

$$\max|B|-\min|B|=۱۲-۲=۱۰$$

(جبر و احتمال – مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۵۳ و ۵۴)

فیزیک ۲

۱۵۱- (سراسری تجربی ۷۰)

طبق رابطهٔ $\vec{F} = m\vec{a}$ ، جهت شتاب وارد بر یک جسم الزاماً در جهت نیروی وارد بر آن است، اما جهت سرعت یک جسم با جهت نیرو و شتاب وارد بر آن هر زاویه‌ای ممکن است بسازد. از طرف دیگر سرعت هر جسم در هر لحظه بر مسیر حرکت آن جسم مماس است.

(فیزیک۲- صفحه‌های ۵۴ تا ۵۹)

۱۵۲- (محسن توانا)

با توجه به قانون دوم نیوتون داریم:

$$F = ma \Rightarrow \begin{cases} F = ۵m_۱ \Rightarrow ۲/۵m_۱ = \dfrac{F}{۲} \\ F = ۴m_۲ \Rightarrow ۲m_۲ = \dfrac{F}{۲} \end{cases}$$

حال اگر قانون دوم نیوتون را برای جسمی به جرم $(۲/۵m_۱ + ۲m_۲)$ بنویسیم، داریم:

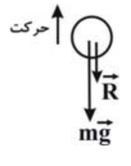
$$F = (۲/۵m_۱ + ۲m_۲) \times a \Rightarrow F = (\frac{F}{۲} + \frac{F}{۲}) \times a$$

$$\Rightarrow a = ۱\frac{m}{s^۲}$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۵۷ و ۵۸)

۱۵۳- (نصراله افاضل)

اگر جهت مثبت را رو به بالا در نظر بگیریم، شتاب متوسط جسم ضمن بالا رفتن برابر است با: $\bar{a} = \dfrac{v - v_۰}{\Delta t} = \dfrac{۰ - ۳۰}{۲ - ۰} = -۱۵\dfrac{m}{s^۲}$



علامت منفی شتاب بیانگر این است که شتاب رو به پایین است و بنابر قانون دوم نیوتون داریم:

$$\sum F_y = m\bar{a} \Rightarrow -mg - \bar{R} = m\bar{a}$$

$$\Rightarrow -۲ \times ۱۰ - \bar{R} = ۲ \times (-۱۵) \Rightarrow \bar{R} = ۱۰N$$

(فیزیک۲- صفحه‌های ۵۷ و ۵۸)

۱۵۴- (سیامک قهرمانی)

طبق قانون جهانی گرانش نیوتون، نیرویی که دو جسم به یکدیگر وارد می‌کنند، از رابطهٔ $F = G\dfrac{m_۱m_۲}{r^۲}$ به‌دست می‌آید. بنابراین برای حالت‌های اول و دوم می‌توان نوشت:

$$\frac{F'}{F} = \frac{G\dfrac{(M-m)(M+m)}{d^۲}}{G\dfrac{M^۲}{d^۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{۸}{۹}F}{F} = \frac{M^۲ - m^۲}{M^۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۸}{۹}M^۲ = M^۲ - m^۲ \Rightarrow m^۲ = \frac{۱}{۹}M^۲ \Rightarrow (\frac{M}{m})^۲ = ۹ \Rightarrow \frac{M}{m} = ۳$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

۱۵۵- (محسن پیکان)

$$f_{k_۱} = \mu_{k_۱} m_۱ g = \frac{۱}{۱۰} \times ۱۰ \times ۱۰ = ۱۰N$$

$$f_{k_۲} = \mu_{k_۲} m_۲ g = \frac{۲}{۱۰} \times ۵ \times ۱۰ = ۱۰N$$

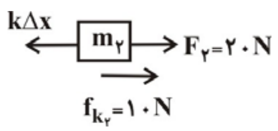
چون $۲۰ + ۱۰ + ۱۰ < ۱۰۰$ است، پس جهت حرکت مجموعه به‌طرف چپ است و می‌توان نوشت:

$$\sum F = (\sum m)a \Rightarrow ۱۰۰ - ۱۰ - ۱۰ - ۲۰ = (۱۰ + ۵)a \Rightarrow a = ۴\frac{m}{s^۲}$$

از طرفی اگر قانون دوم نیوتون را برای جرم $m_۲$ بنویسیم، داریم:

$$k\Delta x - F_۲ - f_{k_۲} = m_۲ a \Rightarrow ۱۰۰\Delta x - ۲۰ - ۱۰ = ۵ \times ۴$$

$$\Rightarrow \Delta x = ۰/۵m = ۵۰cm$$



(فیزیک ۲- صفحه‌های ۵۷ و ۶۴ تا ۷۰)

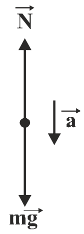
-۱۵۶ *(ابراهیم قلی‌دوست)*

می‌دانیم اندازهٔ شتاب گرانی در سطح سیاره‌ای بـه جـرم M و شـعاع R از رابطهٔ $g = G\frac{M}{R^۲}$ به‌دست می‌آید، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{g_s}{g_e} = \frac{G\frac{M_s}{R_s^۲}}{G\frac{M_e}{R_e^۲}} \xrightarrow[R_s = ۲R_e]{M_s = \frac{۱}{۲}M_e} \frac{g_s}{g_e} = \frac{\frac{\frac{۱}{۲}M_e}{(۲R_e)^۲}}{\frac{M_e}{R_e^۲}} = \frac{۱}{۸}$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

-۱۵۷ *(سراسری ریاضی - ۷۷)*



چون آسانسور به‌طرف پایین مـی‌آیـد، بـا انتخـاب جهـت مثبت رو به پایین می‌توان نوشت:

$$mg - N = ma \Rightarrow ۷۰\times۱۰ - N = ۷۰\times۲$$

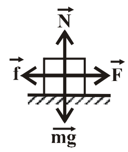
$$\Rightarrow N = ۵۶۰N$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۵۷ و ۶۲ تا ۶۴)

-۱۵۸ *(امیر غفاری)*

برای آن‌که جسم به حرکت درآید، باید نیروی افقی وارد برآن از نیروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت بیش‌تر باشد. بنـابراین ابتـدا انـدازهٔ نیـروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت را با استفاده از رابطهٔ زیر محاسبه می‌کنیم:

$$f_{s\,max} = \mu_s.N \Rightarrow f_{s\,max} = \mu_s.mg = ۰/۴\times۱۰\times۱۰ = ۴۰N$$



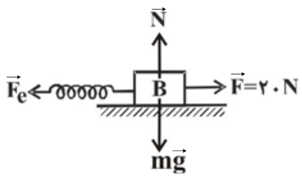
در این حالت چون نیروی افقی وارد بر صـندوق برابـر بـا $۳۰N$ و از نیـروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت کم‌تر است، پس مـی‌تـوان نتیجـه گرفـت کـه جسم ساکن می‌ماند و در نتیجه شتاب حرکت آن صفر است و بنـابر قـانون دوم نیوتون، داریم:

$$\sum F = ma \Rightarrow F - f_s = ۰ \Rightarrow F = f_s = ۳۰N$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۵۷ و ۶۴ تا ۶۸)

-۱۵۹ *(امیرپویان قریب)*

نیروهای وارد بر جسم B را رسم می‌کنیم و قانون دوم نیوتون را در راستای حرکت، برای این جسم می‌نویسیم:



$$\sum F = \sum ma \Rightarrow F - F_e = m_B a \xrightarrow{F_e = kx} F - kx = m_B a$$

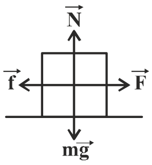
$$\Rightarrow ۲۰ - ۵۰۰x = ۲\times۲ \Rightarrow ۵۰۰x = ۱۶$$

$$\Rightarrow x = ۰/۰۳۲m = ۳/۲cm$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۵۷ و ۶۲ تا ۷۰)

-۱۶۰ *(سیدعلی میرنوری)*

ابتدا با استفاده از مقدار شتاب در حالت اول، مقدار نیروی اصطکاک را به‌دست می‌آوریم.



$$\sum F = ma \Rightarrow F - f_k = ma \Rightarrow ۵ - f_k = ۱\times۲ \Rightarrow f_k = ۳N$$

بعد از قطع شدن نیروی $\vec{F}$، جسم در اثر نیروی اصطکاک شتاب پیدا می‌کند و مقدار شتاب آن برابر است با:

$$\sum F = ma' \Rightarrow -f_k = ma' \Rightarrow a' = \frac{-۳}{۱} = -۳\frac{m}{s^۲}$$

اکنون با توجه به معادلهٔ سرعت، زمان توقـف جسـم را محاسـبه مـی‌کنـیم:

$$v = at + v_۰ \Rightarrow ۰ = -۳\times t + ۲\times۶ \Rightarrow t = ۴s$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۵۷ و ۶۴ تا ۶۸)

فیزیک ۳

-۱۶۱ (ناصر محمدی‌پور)

با استفاده از رابطهٔ $F = E|q|$ داریم:

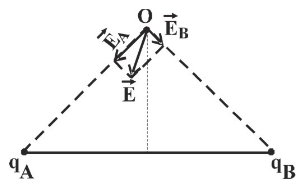
$$16 = E \times 4 \times 10^{-6} \Rightarrow E = 4 \times 10^{6}\frac{N}{C}$$

اکنون با استفاده از رابطهٔ $E = k\frac{|q|}{r^2}$، داریم:

$$\frac{E'}{E} = (\frac{r}{r'})^2 \Rightarrow \frac{E'}{4 \times 10^{6}} = (\frac{r}{2r})^2 \Rightarrow E' = 10^{6}\frac{N}{C}$$

(فیزیک ۳: صفحه‌های ۴۵ تا ۵۳)

-۱۶۲ (آزاد ریاضی - ۷۲)



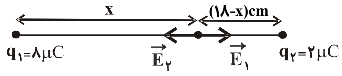
ابتدا میدان الکتریکی ($\vec{E}$) را در دو امتداد OA و OB تجزیه می‌کنیم، در این صورت با توجه به شکل، جهت هردو مؤلفهٔ $\vec{E}_A$ و $\vec{E}_B$ به سمت بارهای q_A و q_B تعیین می‌شوند و در نتیجه علامت هر دو بار منفی می‌باشد. چون $\vec{E}$ به راستای OA متمایل می‌باشد، بنابراین زاویهٔ کوچک‌تری را با $\vec{E}_A$ می‌سازد، لذا $\vec{E}_A$ بزرگ‌تر از $\vec{E}_B$ می‌باشد و با توجه به رابطهٔ $E = k\frac{|q|}{r^2}$، چون $r_A = r_B$ است، نتیجه می‌گیریم که اندازهٔ q_A بزرگ‌تر از اندازهٔ q_B است.

(فیزیک ۳: صفحه‌های ۴۵ تا ۵۱)

-۱۶۳ (سیدعلی میرنوری)

اگر بارها هم‌نام باشند، روی خط واصل دو بار، در فاصلهٔ بین آن‌ها و نزدیک به بار با اندازهٔ کوچک‌تر، نقطه‌ای می‌توان یافت که برایند میدان‌های الکتریکی حاصل از دو بار برابر با صفر باشد.

اگر فاصلهٔ نقطهٔ مورد نظر از بار q_1 برابر با x باشد، داریم:



$$\vec{E}_T = 0 \Rightarrow |\vec{E}_1| = |\vec{E}_2|$$

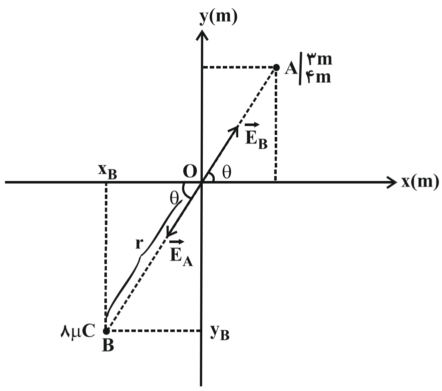
$$\Rightarrow k\frac{|q_1|}{r_1^2} = k\frac{|q_2|}{r_2^2} \Rightarrow \frac{8}{x^2} = \frac{2}{(18-x)^2}$$

$$\Rightarrow 4 = (\frac{x}{18-x})^2 \Rightarrow 2 = \frac{x}{18-x} \Rightarrow x = 12cm$$

(فیزیک ۳: صفحه‌های ۴۵ تا ۵۱)

-۱۶۴ (بهادر کامران)

می‌دانیم وقتی دو بار هم‌نام باشند، میدان الکتریکی برایند بر روی خط واصل دو بار، نزدیک بار با اندازهٔ کوچک‌تر و بین دو بار صفر می‌شود. پس باید نقطهٔ مورد نظر در نقطه‌ای مثل B که در فاصلهٔ r از مبدأ مختصات می‌باشد، قرار گیرد.



$$\overline{OA} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5m$$

$$E_A = E_B \Rightarrow \frac{k|q_A|}{(\overline{OA})^2} = \frac{k|q_B|}{(\overline{OB})^2} \Rightarrow \frac{2}{5^2} = \frac{8}{r^2} \Rightarrow r = 10cm$$

$$\left.\begin{array}{l} |x_B| = r\cos\theta = 10 \times \frac{3}{5} = 6m \\ |y_B| = r\sin\theta = 10 \times \frac{4}{5} = 8m \end{array}\right\} \Rightarrow (-6m, -8m)$$

(فیزیک ۳: صفحه‌های ۴۵ تا ۵۱)

-۱۶۵ (محمدجعفر مفتاح)

خط‌های میدان الکتریکی یکنواخت، موازی، مستقیم و هم‌فاصله هستند و اگر در جهت خط‌های میدان الکتریکی جابه‌جا شویم، پتانسیل الکتریکی کاهش می‌یابد.

(فیزیک ۳: صفحه‌های ۴۹ تا ۵۸)

-۱۶۶ (علی بیکی)

طبق اصل پایستگی انرژی مکانیکی می‌توان نوشت:

$$K_A + U_A = K_B + U_B$$

$$\Rightarrow K_B - K_A = U_A - U_B \xrightarrow{K_A = 0} K_B = -\Delta U = -q\Delta V$$

$$\Rightarrow K_B = -q(V_B - V_A) \Rightarrow K_B = -(-1.6 \times 10^{-19}) \times 20$$

$$\Rightarrow K_B = 3.2 \times 10^{-18}\,J$$

(فیزیک ۳: صفحه‌های ۵۳ تا ۵۸)

-۱۶۷ (نصراله افاضل)

با استفاده از تعریف چگالی سطحی بار الکتریکی و رابطهٔ ظرفیت خازن می‌توان نوشت:

$$\sigma = \frac{q}{A} \xrightarrow{q=CV} \sigma = \frac{CV}{A} \xrightarrow{C=\kappa\varepsilon_0 \frac{A}{d}}$$

$$\sigma = \frac{\kappa\varepsilon_0 \frac{A}{d} \times V}{A} \xrightarrow{\kappa_{\text{هوا}}=1} \sigma = \varepsilon_0 \frac{V}{d}$$

(فیزیک ۳: صفحه‌های ۶۰ تا ۶۷)

-۱۶۸ (سام ترک‌نژاد)

با استفاده از اصل پایستگی بار الکتریکی و در نظر گرفتن این نکته که صفحه‌های ناهم‌نام خازن‌ها به هم متصل شده‌اند، می‌توان نوشت:

$$V_{\text{مشترک}} = \frac{|q_1 - q_2|}{C_1 + C_2} = \frac{|CV_1 - CV_2|}{2C}$$

$$\Rightarrow V_{\text{مشترک}} = \frac{|12 - 24|}{2} \Rightarrow V_{\text{مشترک}} = 6V$$

(فیزیک ۳: صفحه‌های ۶۲ تا ۷۷)

-۱۶۹ (حسن خوشنام)

می‌دانیم اختلاف پتانسیل شاخه‌های موازی با هم برابر است، بنابراین برای خازن معادل خازن‌های C_1 و C_2 می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{C_{1,2}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \xrightarrow[C_2 = 4\mu F]{C_1 = 6\mu F} C_{1,2} = 2.4\mu F$$

$$V_{1,2} = V_3 \Rightarrow \frac{q_{1,2}}{C_{1,2}} = \frac{q_3}{C_3} \xrightarrow{q_{1,2} = q_1} \frac{q_1}{2.4} = \frac{q_3}{1.2}$$

$$\Rightarrow q_1 = 2q_3$$

اکنون با استفاده از رابطهٔ $U = \frac{q^2}{2C}$ می‌توان نوشت:

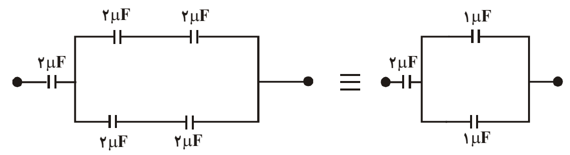
$$\frac{U_3}{U_1} = \left(\frac{q_3}{q_1}\right)^2 \times \left(\frac{C_1}{C_3}\right) \Rightarrow \frac{U_3}{U_1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{6}{1.2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{U_3}{U_1} = \frac{5}{4} = 1.25$$

(فیزیک ۳: صفحه‌های ۷۰ تا ۷۷)

-۱۷۰ (معصومه علیزاده)

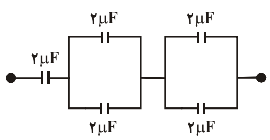
در حالتی که کلید k باز باشد، داریم:

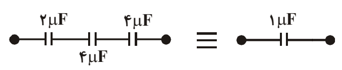


≡ 

$\Rightarrow C' = 1\mu F$

و برای حالتی که کلید k بسته باشد، داریم:



≡ 

$\Rightarrow C'' = 1\mu F$

بنابراین داریم:

$$\frac{C'}{C''} = \frac{1\mu F}{1\mu F} = 1$$

(فیزیک ۳: صفحه‌های ۷۲ تا ۷۷)