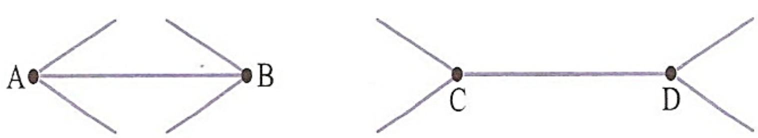
بسم الله الرحمن الرحیم

درس اول: استدلال

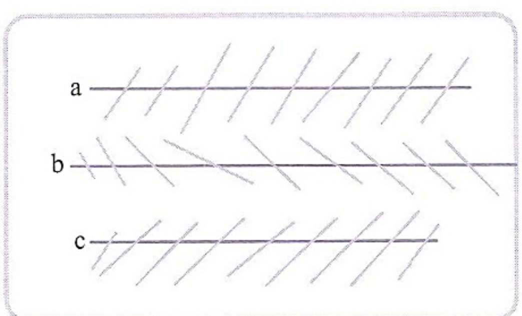
استدلال: استدلال یعنی دلیل‌آوردن و استفاده‌کردن از دانسته‌های قبلی، برای معلوم یا مشخص کردن موضوع یا مسئله‌ای که در ابتدا نامشخص بوده است.

- به استدلالی که درستی موضوع یا مسئله‌ای را مشخص کند، اثبات می‌گوییم.
- رسم شکل در هندسه کمک زیادی به فهم مسئله و تشخیص راه‌حل‌ها می‌کند، اما باید توجه داشت که مشاهدات ما برای تشخیص اندازه‌ها و یا حالت شکل‌ها، صددرصد قابل اطمینان نیستند و گاهی ما را به نتایج نادرست هدایت می‌کنند. برای نمونه به شکل‌های زیر در مثال‌های «الف» و «ب» دقت کنید.

الف) آیا طول پاره‌خط‌های AB و CD در شکل‌های مقابل برابرند؟



ب) آیا خطوط a، b و c در شکل زیر با هم موازی‌اند؟



در هر دو مورد «الف» و«ب» پاسخ مثبت است، اما ممکن است خطای دید ما باعث شود که نتیجه‌ی نادرست بگیریم.

درس دوم: آشنایی با اثبات در هندسه

برای اثبات یا مشخص‌کردن هر موضوع یا مسئله‌ای در هندسه، ابتدا باید ببینیم که چه اطلاعاتی در مورد مسئله داریم، به این اطلاعات داده‌شده‌ی مسئله، فرض مسئله یا داده‌ی مسئله می‌گویند. سپس باید دقت کنیم که مسئله چه چیزی را از ما خواسته است یا باید ببینیم چه چیزی را باید اثبات کنیم. آن‌چه را که باید اثبات کنیم، حکم نامیده می‌شود. نوشتن فرض و حکم برای هر مسئله‌ی هندسی کمک زیادی به دقت در حل مسئله می‌کند.

ثابت کنید در لوزی، ضلع‌های مقابل برابرند.

ابتدا فرض و حکم مسئله را می‌نویسیم.

فرض شکل لوزی است.

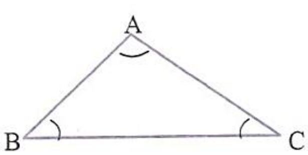
حکم ضلع‌های مقابل لوزی برابرند.

استدلال: می‌دانیم که لوزی نوعی متوازی‌الاضلاع است. پس: $\left\{\begin{array}{l}\text{لوزی نوعی متوازی‌الاضلاع است.}\\ \text{در متوازی‌الاضلاع ضلع‌های مقابل برابرند.}\end{array}\right. \Rightarrow$ در لوزی ضلع‌های مقابل برابرند.

برای مسئله‌ی زیر، فرض و حکم را بنویسید.

اگر در یک مثلث دو زاویه، نامساوی باشند، ضلع مقابل به زاویه‌ی بزرگ‌تر، از ضلع مقابل به زاویه‌ی کوچک‌تر، بزرگ‌تر است.

در این سؤال رسم شکل کمک می‌کند تا بهتر فرض و حکم را تشخیص دهیم.

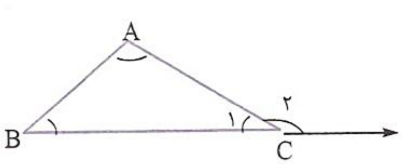


فرض ABC مثلث است و $\hat{A} > \hat{B}$

حکم $BC > AC$

ثابت کنید که در هر مثلث، اندازه‌ی هر زاویه‌ی خارجی، با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاورش برابر است.

ابتدا شکل را رسم می‌کنیم و سپس فرض و حکم را می‌نویسیم.



فرض ABC (ABC مثلث است)

حکم $\hat{C}_2 = \hat{A} + \hat{B}$

اثبات: $\left.\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}_1 = 180^\circ\\ \hat{C}_2+\hat{C}_1 = 180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\cancel{\hat{C}_1} = \hat{C}_2 + \cancel{\hat{C}_1} \Rightarrow \hat{C}_2 = \hat{A}+\hat{B}$

درس سوم: همنهشتی مثلث‌ها

حالت‌های همنهشتی دو مثلث: سال گذشته آموختیم که دو مثلث در حالت کلی می‌توانند به ۳ صورت همنهشت باشند.

۱- داشتن سه ضلع برابر (ض ض ض)

۲- داشتن دو ضلع برابر و زاویه‌ی مساوی بین دو ضلع (ض ز ض)

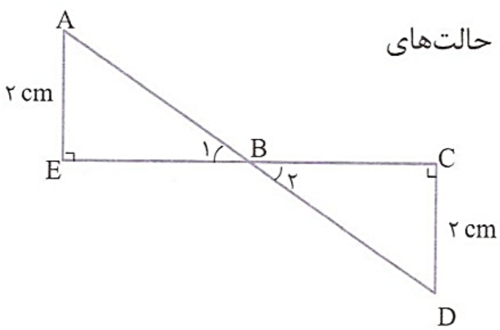
۳- داشتن دو زاویه‌ی برابر و ضلع مساوی بین دو زاویه (ز ض ز)

هم‌چنین یاد گرفتیم که مثلث‌های قائم‌الزاویه، علاوه بر سه حالت فوق به دو صورت دیگر می‌توانند همنهشت باشند که مختص خودشان است.

۱- داشتن وتر و یک ضلع برابر (و ض)

۲- داشتن وتر و یک زاویه‌ی تند برابر (و ز)

اکنون روش‌های ریاضی نوشتن حالت‌های همنهشتی دو مثلث را نیز با مثال زیر برای شما بیان می‌کنیم.



در شکل مقابل پاره‌خط‌های AD و EC یکدیگر را نصف کرده‌اند (منصف یکدیگرند). حالت‌های همنهشتی دو مثلث را بنویسید.

حالت اول: (ض ض ض)

$$\left.\begin{array}{ll} AB = BD & \text{طبق فرض} \\ BE = BC & \text{طبق فرض} \\ AE = CD = ۲\ \text{cm} & \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{(\text{ض ض ض})}{\overset{\Delta}{ABE} \cong \overset{\Delta}{BCD}}$$

حالت دوم: (ض ز ض)

$$\left.\begin{array}{ll} AB = BD & \text{طبق فرض} \\ BE = BC & \text{طبق فرض} \\ \hat{B}_۱ = \hat{B}_۲ & \text{متقابل به رأس} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{(\text{ض ز ض})}{\overset{\Delta}{ABE} \cong \overset{\Delta}{BCD}}$$

حالت سوم: (ز ض ز)

$$\left.\begin{array}{ll} \hat{B}_۱ = \hat{B}_۲ & \text{متقابل به رأس} \\ \hat{C} = \hat{E} = ۹۰^\circ & \\ BE = BC & \text{طبق فرض} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{(\text{ز ض ز})}{\overset{\Delta}{ABE} \cong \overset{\Delta}{BCD}}$$

حالت چهارم: (و ض)

$$\left.\begin{array}{ll} \hat{E} = \hat{C} = ۹۰^\circ & \\ AB = BD & \text{طبق فرض} \\ BE = BC & \text{طبق فرض} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{(\text{و ض})}{\overset{\Delta}{ABE} \cong \overset{\Delta}{BCD}}$$

حالت پنجم: (و ز)

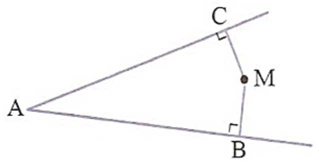
$$\left.\begin{array}{ll} \hat{E} = \hat{C} = ۹۰^\circ & \\ \hat{B}_۱ = \hat{B}_۲ & \text{متقابل به رأس} \\ AB = BD & \text{طبق فرض} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{(\text{و ز})}{\overset{\Delta}{ABE} \cong \overset{\Delta}{BCD}}$$

درس چهارم: حل مسئله در هندسه

برای حل مسئله‌های هندسه، ابتدا باید صورت مسئله را با دقت بخوانیم و به هر کلمه‌ای از صورت مسئله توجه کافی داشته باشیم و سپس مفاهیم تشکیل‌دهنده‌ی مسئله را به خوبی بشناسیم.

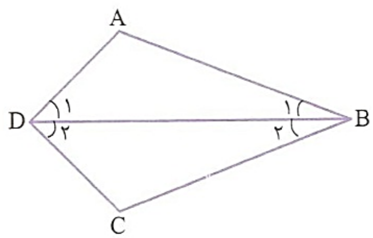
به مثال‌های زیر دقت کنید:

فاصله‌ی نقطه‌ی M از دو ضلع زاویه‌ی A، یعنی طول پاره‌خط‌های عمودی که از M بر دو ضلع $\hat{A}$ رسم می‌شود، یعنی: MB و MC (در شکل زیر).

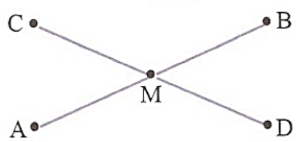


اگر در صورت مسئله گفته شود که BD نیمساز زاویه‌ی B $(A\hat{B}C)$ است، یعنی: $\hat{B}_۱ = \hat{B}_۲$.

از این گفته نمی‌توان نتیجه گرفت که $\hat{D}_۱ = \hat{D}_۲$.



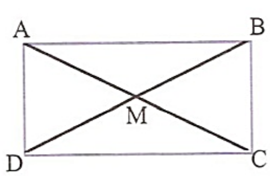
اگر در صورت مسئله گفته شود که پاره‌خط CD، پاره‌خط AB را نصف کرده یا پاره‌خط CD از وسط AB گذشته است، فقط می‌توان نتیجه گرفت که: $AM = MB$ و نمی‌توان نتیجه گرفت که $CM = MD$.



اما اگر در صورت مسئله گفته شود که پاره‌خط‌های AB و CD یکدیگر را نصف کرده‌اند، آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت که: $CM = MD$ و $AM = MB$.

- یکی از راه‌های اثبات برابری دو پاره‌خط یا دو زاویه در هندسه، استفاده از همنهشتی مثلث‌ها است؛ یعنی باید دو مثلث بیابیم که دو پاره‌خط یا دو زاویه‌ی موردنظر، دقیقاً هر کدام ضلع یکی از مثلث‌ها یا زاویه‌ی یکی از مثلث‌ها باشند و پس از اثبات همنهشتی دو مثلث، تساوی دو پاره‌خط یا دو زاویه‌ی موردنظر را نتیجه بگیریم.

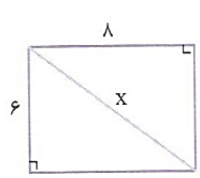
ثابت کنید قطرهای مستطیل با هم برابرند.

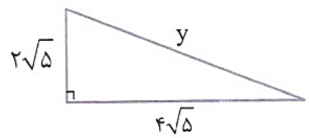


ابتدا شکل را رسم می‌کنیم. در این شکل هشت مثلث دیده می‌شود (!) اما برای اثبات برابری قطرهای مستطیل باید مثلث‌های مناسب برای این کار انتخاب شود، مثلاً مثلث‌های AMB و BMC یا مثلث‌های BMC و CMD برای حل این مسئله به ما کمکی نمی‌کنند، اما با اثبات همنهشتی مثلث‌های ADC و BCD یا ABC و BCD، به نتیجه‌ی دلخواه می‌رسیم.

- روش دوم اثبات برابری دو پاره‌خط در هندسه، استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس است. به مثال زیر توجه کنید.

در شکل زیر ثابت کنید قطر مستطیل با وتر مثلث برابر است.

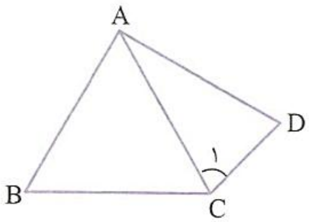




$$\left.\begin{array}{l} x^۲ = ۶^۲ + ۸^۲ = ۳۶ + ۶۴ = ۱۰۰ \Rightarrow x = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰ \\ y^۲ = (۲\sqrt{۵})^۲ + (۴\sqrt{۵})^۲ = ۲۰ + ۸۰ = ۱۰۰ \Rightarrow y = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰ \end{array}\right\} \Rightarrow x = y$$

روش سوم، روش مقایسه‌ی دو پاره‌خط مساوی با یک پاره‌خط است. به مثال زیر توجه کنید.

مثلث ABC متساوی‌الاضلاع و $\hat{C}_1 = \hat{D}$ است. ثابت کنید: $BC = AD$

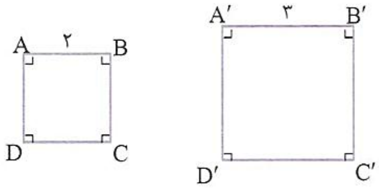


$$\left.\begin{array}{l} \hat{C}_1 = \hat{D} \Rightarrow AC = AD \\ AC = BC \quad \text{طبق فرض} \end{array}\right\} \Rightarrow AD = BC$$

درس پنجم: شکل‌های متشابه

دو چندضلعی در صورتی متشابه هستند که تعداد اضلاع آن‌ها مساوی، ضلع‌های متناظر آن‌ها با هم متناسب (به یک نسبت بزرگ یا کوچک شده یا بدون تغییر) باشند و زاویه‌های متناظر آن‌ها مساوی باشند.

دو مربع دلخواه همواره با هم متشابه‌اند، زیرا زاویه‌های نظیر آن‌ها با هم برابر و نسبت ضلع‌های نظیر آن‌ها به دلیل مساوی‌بودن هر چهار ضلع، برابر است. به مربع‌های شکل روبه‌رو توجه کنید.



$\hat{C} = \hat{C}' = ۹۰^\circ$ $\qquad$ $\hat{A} = \hat{A}' = ۹۰^\circ$

$\hat{D} = \hat{D}' = ۹۰^\circ$ $\qquad$ $\hat{B} = \hat{B}' = ۹۰^\circ$

$ABCD \sim A'B'C'D' \Rightarrow$ عدد $\frac{۲}{۳}$ یا $\frac{۳}{۲}$ را نسبت تشابه دو مربع فوق می‌گویند. $\qquad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{۲}{۳}$

علامت متشابه بودن دو شکل (علامت تشابه)

نسبت دو ضلع متناظر در دو شکل متشابه را نسبت تشابه می‌گویند. برای مثال در مربع‌های شکل بالا، نسبت تشابه مساوی $\frac{۲}{۳}$ یا $\frac{۳}{۲}$ است.

به طور کلی هر دو چندضلعی منتظم دلخواه که دارای تعداد اضلاع برابر باشند، متشابه‌اند.

برای مثال هر دو مثلث متساوی‌الاضلاع دلخواه متشابه‌اند، یا هر دو شش‌ضلعی منتظم دلخواه متشابه‌اند.

آیا هر دو لوزی دلخواه متشابه‌اند؟

خیر، در دو لوزی دلخواه نسبت اضلاع نظیر هم، با هم برابر است (به دلیل مساوی‌بودن چهار ضلع) اما ممکن است که زاویه‌های نظیر آن‌ها برابر نباشد و به همین دلیل دو لوزی دلخواه متشابه نیستند.

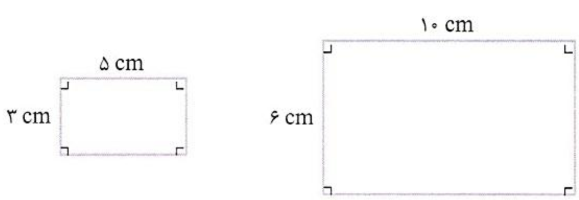
دو لوزی در صورتی متشابه‌اند که یک زاویه‌ی مساوی داشته باشند.

آیا هر دو مستطیل دلخواه متشابه‌اند؟

خیر. در دو مستطیل دلخواه، به دلیل مساوی‌بودن زاویه‌ها، زاویه‌های نظیر دو شکل مساوی‌اند، اما ممکن است نسبت اضلاع نظیر در دو مستطیل برابر نباشد، به همین دلیل دو مستطیل دلخواه متشابه نیستند.

دو مستطیل دلخواه در صورتی متشابه‌اند که نسبت عرض‌های آن‌ها با نسبت طول‌هایشان برابر باشد.

دو مستطیل شکل مقابل متشابه‌اند، زیرا زاویه‌های نظیر در دو شکل برابرند و نسبت عرض‌های آن‌ها با نسبت طول‌هایشان برابر است.



$\left.\begin{array}{l} \text{نسبت عرض‌ها} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲} \\ \text{نسبت طول‌ها} = \frac{۵}{۱۰} = \frac{۱}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{نسبت طول‌ها} = \text{نسبت عرض‌ها}$

بنابراین دو مستطیل با هم متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها $\frac{۱}{۲}$ یا ۲ است.

نقشه‌ی هر مکان، با آن مکان متشابه است و نسبت تشابه آن‌ها را مقیاس نقشه می‌گویند. برای مثال اگر مقیاس نقشه‌ای $\frac{۱}{۱۰۰۰۰۰}$ باشد و فاصله‌ی دو نقطه روی نقشه ۱ سانتی‌متر باشد، فاصله‌ی نقطه‌های متناظر آن‌ها در طبیعت ۱۰۰۰۰۰ سانتی‌متر یا یک کیلومتر است.

زاویه‌ی بین دو خط در نقشه، با زاویه‌ی بین خط‌های متناظر آن‌ها در طبیعت برابر است. برای مثال اگر زاویه‌ی بین دو خط در نقشه ۶۷° باشد، زاویه‌ی بین خط‌های متناظر آن‌ها در طبیعت نیز ۶۷° است.

دو شکل همنهشت با هم متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها ۱ است.

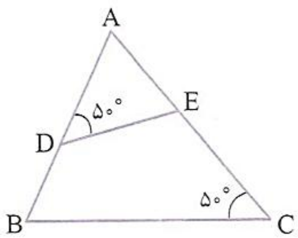
تشابه دو مثلث: دو مثلث در سه حالت با هم متشابه هستند:

۱- تساوی دو زاویه

۲- دارابودن دو ضلع متناسب و زاویه‌ی مساوی بین دو ضلع

۳- متناسب‌بودن سه ضلع

در شکل زیر دو مثلث متشابه‌اند.

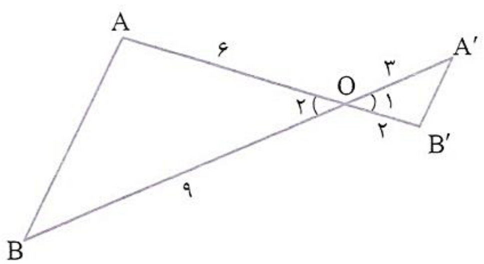


$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{A}\ \text{زاویه‌ی مشترک} \\ \hat{D}=\hat{C}=۵۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \underset{(\text{زز})}{A\overset{\Delta}{D}E \sim A\overset{\Delta}{B}C}$$

در دو مثلث متشابه، ضلع‌های مقابل به زاویه‌های نظیر مساوی، متناسب‌اند یعنی در شکل بالا:

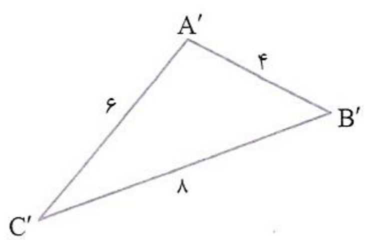
$$\frac{AE}{AB}=\frac{AD}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

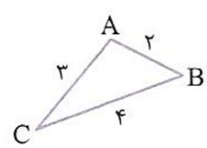
در شکل زیر دو مثلث متشابه‌اند.



$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_۱=\hat{O}_۲\ \text{متقابل‌به‌رأس} \\ \dfrac{OB'}{OA}=\dfrac{۲}{۶}=\dfrac{۱}{۳} \\ \dfrac{OA'}{OB}=\dfrac{۳}{۹}=\dfrac{۱}{۳}\end{array}\right\} \Rightarrow O\overset{\Delta}{A}B \sim O\overset{\Delta}{A'}B'$$ دو ضلع متناسب و زاویه‌ی بین مساوی

در شکل زیر دو مثلث متشابه‌اند.





$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{۲}{۴}=\dfrac{۱}{۲} \\ \dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{۳}{۶}=\dfrac{۱}{۲} \\ \dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{۴}{۸}=\dfrac{۱}{۲}\end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C'$$ به حالت سه ضلع متناسب

دو مثلث متساوی‌الساقین همواره متشابه نیستند، بلکه در صورتی متشابه‌اند که زاویه‌ی رأس آن‌ها برابر باشد.

دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین همواره متشابه‌اند.