

فصل چهارم جبر و معادله ریاضی هشتم

درسال قبل آموختیم که می توانیم رابطه ریاضی و عبارت

کلامی که در مورد اعداد می گوئیم با حروف نمایشی دهیم به جای کلمه عدد از حروفی مثل X, Y استفاده کرد

مثال ۱: الف) ۴ واحد بیشتر از ۲ برابر عدد $2x + 4$

ب) مجموع نصف مربع و ثلث یک عدد $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}$

۱- هر عدد به غیر از صفره توان صفر برسد حاصلش یک است $a^0 = 1$ $a \neq 0$

۲- حاصل تقسیم یک عدد بر قرینه اش برابر با منفی یک است $a \div (-a) = -1$

نوشتن رابطه بین اعداد شکل ها

بهرتر از جدول استفاده کنیم و نگاه کنیم بینیم چند تا زیاد شده بر آن تقسیم می کنیم. آن را بصورت مضرب

آن می نویسیم

مثال ۲: شکل n ام از چند چوب کبریت ساخته شده است

تعداد چوب کبریت
شماره شکل
رابطه ریاضی

$1 \times 2 + 1$ $2 \times 2 + 1$ $3 \times 2 + 1$

$n \rightarrow 2n + 1$

مثال ۳: در رشته عددی n ام عدد فید و n ام عدد زوج را بنویسید

۱, ۳, ۵, ۷

مقدار عددی ۱ ۳ ۵

شماره عدد ۱ ۲ ۳

رابطه ریاضی $1 \times 2 + 0$ $1 \times 2 + 1$ $2 \times 2 + 1$

$(n-1) \times 2 + 1 = 2n - 2 + 1 = 2n - 1$

۲, ۴, ۶, ۸

مقدار عددی ۲ ۴ ۶ ۸

شماره عدد ۱ ۲ ۳ ۴

رابطه ریاضی $1 \times 2 + 0$ $2 \times 2 + 0$ $3 \times 2 + 0$ $4 \times 2 + 0$

$n \rightarrow 2n$

تالیف: مهندس اسماعیلی

۱، ۸، ۲۷، ۶۴، ۱۰۰۰، ...

مثال ۴: در رشته زیر جمله ۱۱ام کدام است

در این رشته که به صورت منظم مرتب نشده است، از تجزیه استفاده می‌کنیم.

$$1^3 = 1 \quad 2^3 = 8 \quad 3^3 = 27 \quad n^3$$

جمله جبری

به حروفی که در جبر استفاده می‌کنیم متغیر می‌گوییم که در ضرب با عدد جمله جبری بوجود می‌آورد

$$2x \cdot 9y = 18xy$$

بضض حرفی بضض عددی

۱- برای ساده نوشتن ضرب بین عدد و حروف را نفی نویسیم.

۲- اگر یک متغیر دوبار یا چند بار در خودش ضرب شود بصورت تواندار می‌نویسیم

$$2x \cdot x \cdot x \cdot b \cdot b \cdot b = 2x^3 b^3$$

۳- اگر در یک جمله جبری ضریب عدد وجود نداشته باشد یک می‌گیریم

$$9xy^2 = y^2 \cdot 9x$$

۴- در جمله جبری جای حروف را عوض کنیم ایرادی ندارد

جملات متشابه

اگر قسمت حرفی دو جمله یکسان باشد آن دو جمله متشابه است (جابه جایی حروف ایرادی ندارد) اما حتی

اگر یک حرف یا توان حروف متفاوت باشد متشابه نیستند

مثال ۵: $2xy - 5xy^2$ متشابه نیست

$5xy^2 - 5xy^2$ متشابه است

$2x^2z^2y - x^2yz$ متشابه نیست

عبارت جبری

از کنار هم قرار گرفتن دو یا چند جمله جبری بوجود می‌آید

جمع تفریق عبارت جبری

فقط جملات متشابه را باهم جمع و تفریق می‌کنیم

مثال ۶:
$$9xy - 3x^2 + 9x - 4x^2 - 5y^2 + 7x = 18x - 7x^2 + 9y$$

ضرب یک عدد در یک جمله جبری
عدد در قسمت عددی جمله جبری ضرب می‌شود و حروف و توان‌های آن تغییر نمی‌کند.
تالیف: مهندس اسماعیلی

$$3(2a^2 - 4ab + 3b^2) = 6a^2 - 12ab + 9b^2$$

مثال ۷:

ضرب یک عدد در یک جمله، قسمت عددی و قسمت حرفی را در هم ضرب قسمت حرفی توان حرفی که یکسان است با هم جمع می کنیم

الف) $- 2x^2y \times 3yz = - 6x^2y^2z$

مثال ۸:

ب) $2x(2x-2y) - 2y(2x-2y) = 4x^2 - 4xy - 4xy + 4y^2 = 4x^2 - 8xy + 4y^2$

ج) $(3a-2b)(a-b) = 3a^2 - 3ab - 2ab + 2b^2 = 3a^2 - 5ab + 2b^2$

گسترده یک عدد

برای گسترده نویسی یک عدد یکان را در یک و دهگان را در ۱۰ و صدگان را در ۱۰۰ ضرب می کنیم و آن

الف) $125 = 1 \times 100 + 2 \times 10 + 5 \times 1$

ها را با هم جمع می کنیم

ب) $abc = a \times 100 + b \times 10 + c \times 1$

مثال ۹:

مقدار دهی (عدد گذاری) در عبارت های جبری

برای محاسبه عبارت جبری می توان به جای حروف عدد بگذاریم فقط در داخل پرانتز قرار می دهیم

$2a^2b - 2ab^3 = (a = -2 \text{ و } b = -1)$

$2(-2)^2(-1) - 2(-2)(-1)^3 = -8 - 4 = -12$

مثال ۹:

نکته ۱: در صورت امکان ابتدا کامل کنید بعد عدد گذاری کنید

مثال ۱۰: در هر شکل خروجی یا ورودی را مشخص کنید

$-\frac{3}{2} \rightarrow y = 12x - 1$

$y = 12(-\frac{3}{2}) - 1 = -18 - 1 = -19$

$19 \rightarrow y = -\frac{5}{3}x + 2$

$19 = -\frac{5}{3}x + 2 \Rightarrow 19 - 2 = -\frac{5}{3}x \Rightarrow -\frac{5}{3}x = 17 \Rightarrow x = \frac{17 \times (-3)}{-5} = 10.2$

① $11 \rightarrow \boxed{} \rightarrow y = 4x$

② $5 \rightarrow y = 4x + 3 \rightarrow \boxed{33}$

$y = 4x + 3$

تالیف: مهندس اسماعیلی

باید رابطه های متضاد را امتحان کنیم

۵ را کش برای برسیتم ، به علاوه ۳

تقسیم دو عدد تواندار با پایه های مساوی

توان ها را از هم کم می کنیم (خط کسری همان تقسیم است)

$$x^{10} \div x^3 = x^7$$

$$\frac{b^8}{b^2} = b^6$$

مثال ۱۱

تقسیم یک جمله بر یک جمله.

ابتدا قسمت عددی را بر هم تقسیم می کنیم اگر بر هم تقسیم می کنیم اگر بر هم بخش پذیر نبودند حاصل را بصورت کسری می نویسیم مبنی توان حرفی که پایه های یکسان دارند از هم کم می کنیم

$$\text{الف) } 5b^3 \div 3b^2 = \left(\frac{5}{3}\right)b$$

مثال ۱۲:

$$\text{ب) } 12x^2y^2 \div 6x^2y^2 = 2x^0y^0 = 2$$

تبدیل جمع و تفریق به ضرب (فاکتور گیری)

۱- ب.م.م قسمت عددی را مشخص کنید

۲- حروف مشترک با توان کم تر را در کنار ب.م.م قسمت عددی می نویسیم تا جمله جبری ایجاد شود

۳- تک تک جملات را بر این جمله تقسیم می کنیم و حاصل تقسیم را در یک پرانتز می نویسیم

$$\text{الف) } 28x^2y^3 - 14x^3y^2 = 14x^2y^2(2y - x)$$

مثال ۱۳:

$$\text{ب) } -36a^6b + 30a^2b^2c = 6a^2b(-6a^4 + 5bc)$$

$$\text{ج) } b^2a^3 + 3^4 - b^2a \times 3^4 = 3^4ab^2(a^2 - 1)$$

ساده کردن کسرها

اگر در صورت و مخارج یک کسر فقط علامت ضرب وجود داشت می توانیم آن را ساده کنیم اعداد باهم ساده می شوند و حروف که پایه یکسان دارند باهم در ساده کردن حروف توان ها را از هم کم می کنیم و پاسخ را در جای می نویسیم که توان بزرگتر است

$$\text{الف) } \frac{14a^3b^2}{1a^2b^4} = \frac{2a^1}{b^2}$$

مثال ۱۴:

$$\text{ب) } \frac{a^4b^4 \times (a+b)(a-b)}{a^4b^4 \times (a-b)} = \frac{a^2(a+b)}{b^2}$$

نکته ۲: در اعداد تواندار با پایه مساوی ب.م.م عددی که توان کم تر دارد

$$3^9 - 3^7 = 3^7(3^2 - 1)$$

مثال ۱۵:

نکته ۳: در کسرهایی که در صورت و مخارج آن جمع و تفریق جملات جبری وجود دارد می توان با تبدیل جمع و تفریق به ضرب (فاکتورگیری) کسر را ساده کرد

$$\text{الف) } \frac{14x^2y^2 - 20x^3y^3}{12x^2y - 15xy^2} = \frac{2x^2y^2(7x - 10y)}{3xy(4x - 5y)} = \frac{2}{3} \frac{x^2y}{y}$$

مثال ۱۶:

$$\text{ب) } \frac{a^4a - b \times a^4}{a \times a^4 - b \times a^4} = \frac{a^4(a-b)}{a^4(a-b)} = a^2$$

مثال ۱۷: ثابت کنید مجموع دو عدد فرد یک عدد زوج است؟

عدد فرد $2n-1$ عدد فرد $2m-1$

$$2n-1 + 2m-1 = 2n + 2m - 2 = 2(n+m-1)$$

پس نتیجه در 2 ضرب شده است؛ پس حاصل بر 2 بخش پذیر است.

پس زوج است.

به توان رساندن پرانتز

هرگاه بیک پرانتز به توان میرسد مانند اعداد تواندار به تعداد توان در خودش ضرب میشود

$$\begin{aligned} (2a-2b)^2 + 1ab &= (2a-2b)(2a-2b) + 1ab && \text{مثال ۱۸:} \\ &= \underline{\underline{\varepsilon a^2}} - \underline{\underline{\varepsilon ab}} - \underline{\underline{\varepsilon ab}} + \underline{\underline{\varepsilon b^2}} + \underline{\underline{1ab}} = \varepsilon a^2 + \varepsilon b^2 \end{aligned}$$

معادله

برای حل معادله باید اعدادی که مجهول هستند به یک سمت و اعدادی معلوم هستند به سمت دیگر ببریم هر

عددی که آن را جابجا می کنیم علامتش قرینه میشود سپس دو طرف تساوی را ساده می کنیم و در نهایت

معلوم را بر ضریب مجهول تقسیم می کنیم

$$\begin{aligned} \varepsilon(2x-2) &= 2(5x+2) - 12 && \text{مثال ۱۹:} \\ \Rightarrow 12x - 8 &= 10x + 4 - 12 \Rightarrow 12x - 10x = +8 + 4 - 12 \\ \Rightarrow 2x = 0 &\Rightarrow x = \frac{0}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{x=0} \end{aligned}$$

معادله کسری

۱- ابتدا ک.م.م هم مخرج را محاسبه می کنیم

۲- سپس هم اعداد را (چه معلوم و چه مجهول) را در دو طرف تساوی در ک.م.م ضرب می کنیم در این حالت

معادله از حالت کسری خارج میشود

$$\text{الف) } \frac{2}{3} - \frac{x}{2} + 2 = \frac{x}{3} - 1$$

$$\Rightarrow 9\left(\frac{2}{3} - \frac{x}{2} + 2\right) = 9\left(\frac{x}{3} - 1\right) \Rightarrow \varepsilon - 3x + 12 = 2x - 9$$

مثال ۲۰:

$$\Rightarrow -3x - 2x = -\varepsilon - 9 - 12 \Rightarrow -5x = -22 \Rightarrow x = \frac{22}{5} = \varepsilon \frac{2}{5}$$

$$\text{ب) } \frac{-2x+3}{4} - 5 = \frac{2x+1}{2} + x$$

$$\Rightarrow 12 \times \frac{(-2x+3)}{4} - 12 \times 5 = 12 \times \frac{(2x+1)}{2} + 12x$$

$$\Rightarrow 2(-2x+3) - 60 = 3(2x+1) + 12x$$

$$\Rightarrow -4x + 6 - 60 = 6x + 3 + 12x$$

$$\Rightarrow 22x = -54 \Rightarrow x = \frac{-54}{22}$$

تالیف: مهندس اسماعیلی

$$ج) \frac{7-3q}{-2} = \frac{7q-3}{5}$$

$$\Rightarrow -2(7-3q) = 5(7-3q) \Rightarrow -14q + 14 = 35 - 15q \Rightarrow -14q + 15q = 35 - 14$$

$$\Rightarrow \boxed{q = 21}$$

حل مسئله با معادله

ابتدا باید مسائل را به معادله تبدیل کنیم که برای اینکار عبارت کلامی را بصورت عبارت جبری می کنیم

الف) 4 برابر سن یک فرد: سن فرد را x فرض می کنیم

ب) 5 واحد بیشتر از 3 برابر قرینه یک عدد $-3q + 5$

ج) اختلاف خمسی و نصف یک عدد $\frac{q}{5} - \frac{q}{2}$

مثال 21: اگر به مجموع ثلث و ربع یک عدد 8 واحد اضافه کنیم حاصل 12 واحد کمتر از همان عدد میشود این

عدد را پیدا کنید

$$\frac{q}{2} + \frac{q}{3} + 8 = q - 12 \Rightarrow 3q + 2q + 44 = 12q - 144$$

$$[3, 2] = 12$$

$$\Rightarrow 5q + 2q - 12q = -144 - 44 \Rightarrow 5q = -240 \Rightarrow q = \frac{-240}{-5} = 48$$

مثال 22: فردی 54 ساله دارد او یک فرزند 13 ساله و یک فرزند 18 ساله دارد پس از چند سال مجموع سن دو

فرزند او با سن خود او برابر میشود؟

$$(13 + q) + (18 + q) = 54 + q$$

$$\Rightarrow q + q - q = 54 - 18 - 13 \Rightarrow \boxed{q = 23}$$

تمرین

۱- عبارت جبری را ساده کنید.

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 =$$

مقدار عددی عبارت حاصل را به از $a=2$ و $b=-2$ را ساده کنید.

۲- معادله های زیر را حل کنید.

$$2(x-1) = 3(x-1)$$

$$\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} = \frac{1}{6}$$

۳- اتحاد های مهم را بنویسید.