https://t.me/Nader_belalzadeh

تابع

فصل ۱

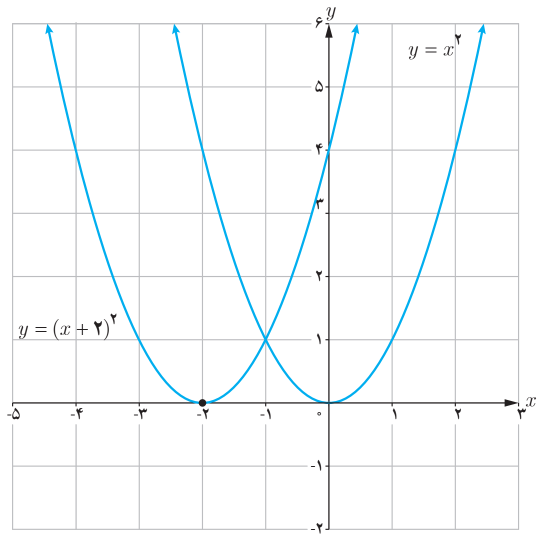
درس ۱

تبدیل نمودار توابع

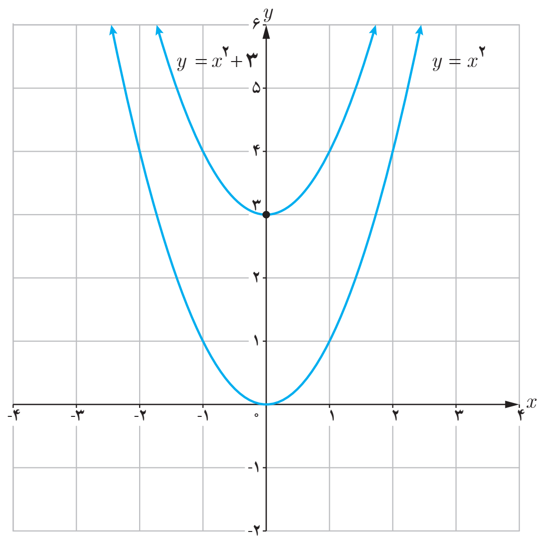
برای رسم بسیاری از توابع، نیاز به روش‌های پیچیده نیست. اگر نمودار یک تابع را در اختیار داشته باشیم، می‌توانیم به کمک برخی از تبدیل‌ها، نمودار بعضی از توابع دیگر را رسم کنیم.

انتقال‌های عمودی و افقی

در سال‌های قبل با انتقال‌های عمودی و افقی آشنا شده‌اید. به‌عنوان مثال می‌توانید نمودار توابع $y=(x+۲)^۲$ و $y=x^۲+۳$ را به کمک نمودار تابع $y=x^۲$ رسم کنید.



(الف)



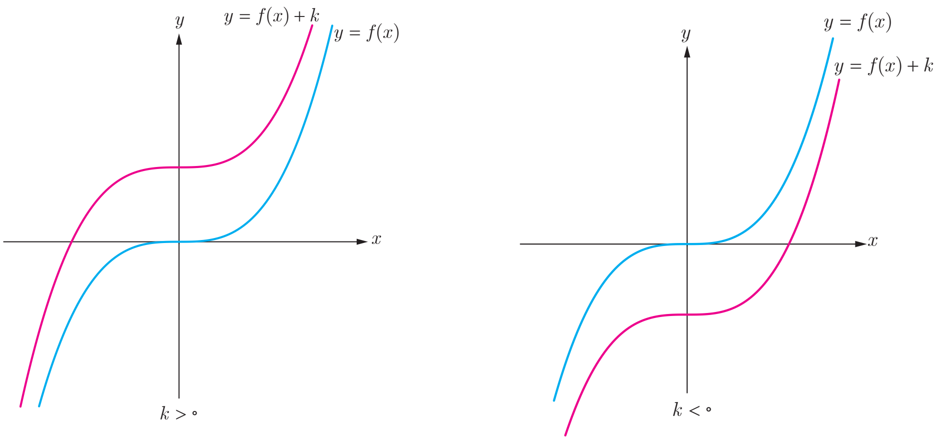
(ب)

در حالت کلی (مانند مثال بالا، قسمت ب) اگر $(x_\circ , y_\circ)$ یک نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد و تابع g به‌صورت $g(x)=f(x)+k$ تعریف شده باشد، در این صورت

$$g(x_\circ)=f(x_\circ)+k=y_\circ+k$$

بنابراین $(x_\circ , y_\circ+k)$ یک نقطه از نمودار تابع g است، یعنی برای $k>\circ$، هر نقطه از نمودار تابع g، دقیقاً k واحد بالاتر از نمودار تابع f است.

برای رسم نمودار $y=f(x)+k$، اگر $k>0$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم و برای $k<0$ این انتقال به سمت پایین انجام می‌شود.

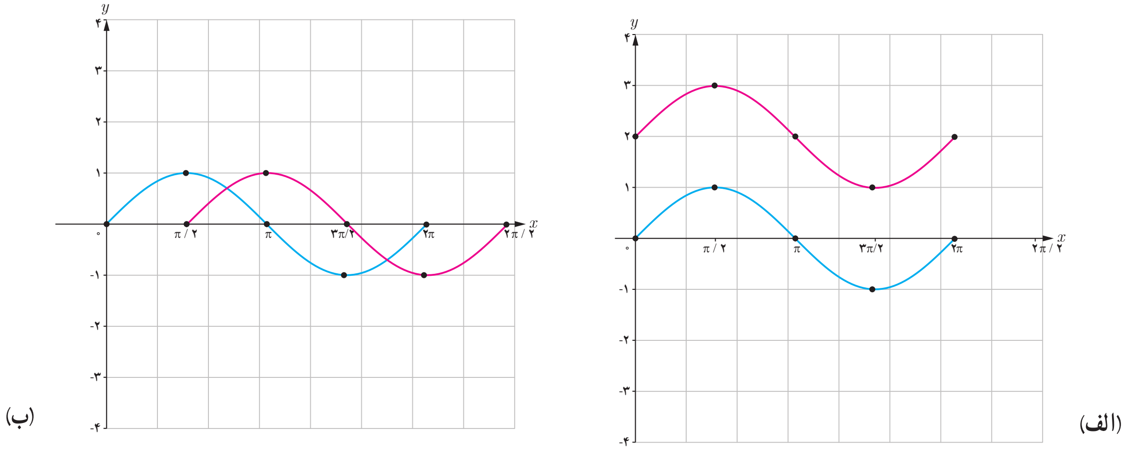


به روش مشابه، اگر (x_0, y_0) یک نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد و تابع h به‌صورت $h(x)=f(x+k)$ تعریف شده باشد، در این صورت

$$h(x_0-k)=f(x_0-k+k)=f(x_0)=y_0$$

بنابراین $(x_0-k\ ,y_0)$ از نمودار h متناظر با نقطه (x_0, y_0) از نمودار f است.

برای رسم نمودار $y=f(x+k)$، اگر $k>0$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای $k<0$، این انتقال به اندازه $|k|$ واحد به سمت راست انجام می‌شود.



✤ **مثال :** نمودار تابع $y=\sin x$ با دامنه $[0, 2\pi]$ رسم شده است. می‌خواهیم نمودار تابع $f(x)=\sin x+2$ و $g(x)=\sin(x-\frac{\pi}{2})$ را به کمک انتقال رسم کنیم. با توجه به توضیحات بالا، کافی است نمودار تابع $y=\sin x$ را ۲ واحد به بالا انتقال دهیم تا $f(x)$ رسم شود (شکل الف) و اگر آن را $\frac{\pi}{2}$ واحد به راست انتقال دهیم، $g(x)$ رسم می‌شود. (شکل ب)

کار در کلاس

۱

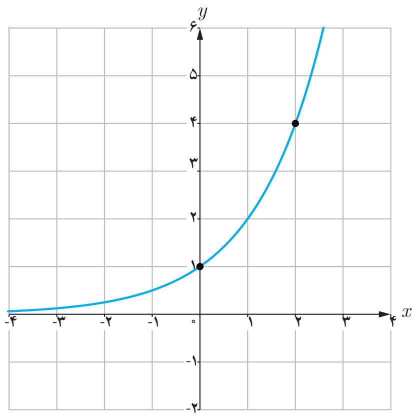
الف) نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را با دامنه $[۰,۹]$ رسم کنید و برد تابع را مشخص کنید.

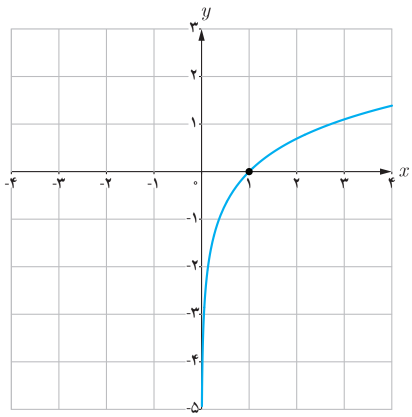
ب) نمودار توابع $k(x)=f(x-۲)$ و $g(x)=f(x)+۳$ را به کمک انتقال رسم کنید.

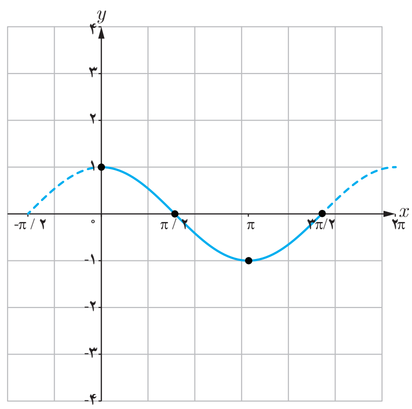
ج) دامنه و برد توابع k و g را محاسبه و با دامنه و برد تابع f مقایسه کنید.

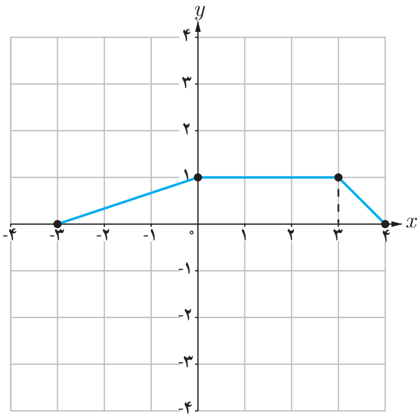
	$f(x)=\sqrt{x}$	$k(x)=f(x-۲)$	$g(x)=f(x)+۳$
دامنه	$[۰,۹]$		
برد			

۲ در زیر، نمودار توابع $y=۲^x$، $y=\log x$ و $y=\cos x$ رسم شده‌اند. نمودار توابع $y=۲^{x-۱}+۲$، $y=\log(x+۲)$ و $y=\cos(x+\frac{\pi}{۲})$ را به کمک انتقال رسم کنید.









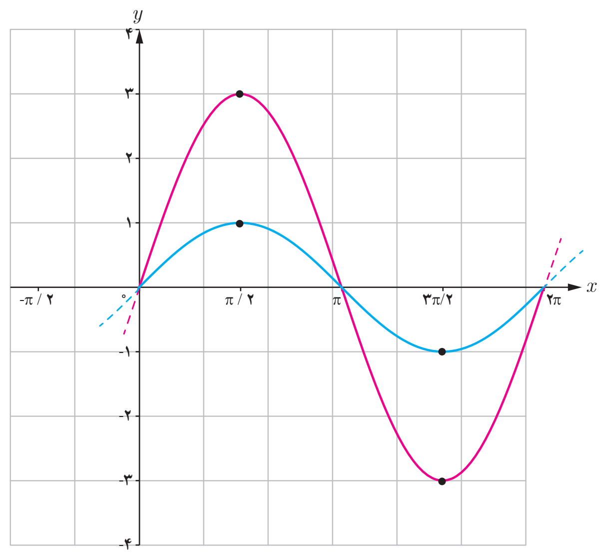
۳ نمودار تابع f به صورت روبه‌رو داده شده است. با انتقال‌های افقی و عمودی، نمودار تابع $y=f(x+۱)-۳$ را رسم کنید.

انبساط و انقباض عمودی

فعالیت

۱ در جدول زیر، چند نقطه از نمودارهای توابع $y = \sin x$ و $y = ۳\sin x$ را مشخص کرده و نمودار آنها را رسم کرده‌ایم. با تکمیل این جدول، نمودار تابع $y = \frac{۱}{۲}\sin x$ را نیز در دستگاه زیر رسم کنید.

x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
$y=\sin x$	۰	۱	۰	-۱	۰
$y=۳\sin x$	۰	۳	۰	-۳	۰
$y = \frac{۱}{۲}\sin x$	...	...	...	...	...



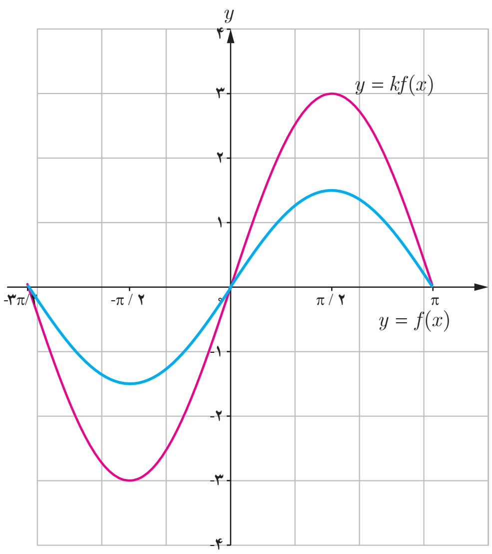
۲ با مقایسه نمودارهای بالا، نمودارهای توابع $y = ۳\sin x$ و $y = \frac{۱}{۲}\sin x$ چه تفاوتی با نمودار تابع $y = \sin x$ دارند؟

در حالت کلی اگر $(x_۰, y_۰)$ یک نقطه از نمودار تابع $y = f(x)$ باشد و تابع g به صورت $g(x) = kf(x)$ تعریف شده باشد، در این صورت

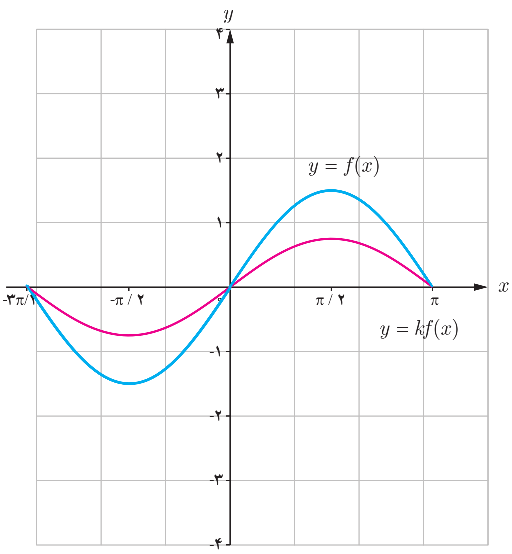
$$g(x_۰) = kf(x_۰) = ky_۰$$

بنابراین $(x_۰, ky_۰)$ یک نقطه از نمودار تابع g متناظر با نقطه $(x, y_۰)$ از نمودار تابع f است.

برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$، کافی‌است عرض نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در k ضرب کنیم. در شکل‌های زیر، نمودار تابع $y = kf(x)$ برای دو حالت $k > ۱$ و $۰ < k < ۱$ رسم شده است.



الف) $k>۱$



ب) $۰<k<۱$

اگر $k > ۱$ باشد، نمودار $y = kf(x)$ از **انبساط عمودی** نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود و اگر $۰ < k < ۱$ باشد، نمودار $y = kf(x)$ از **انقباض عمودی** نمودار $y = f(x)$ به‌دست می‌آید.

کار در کلاس

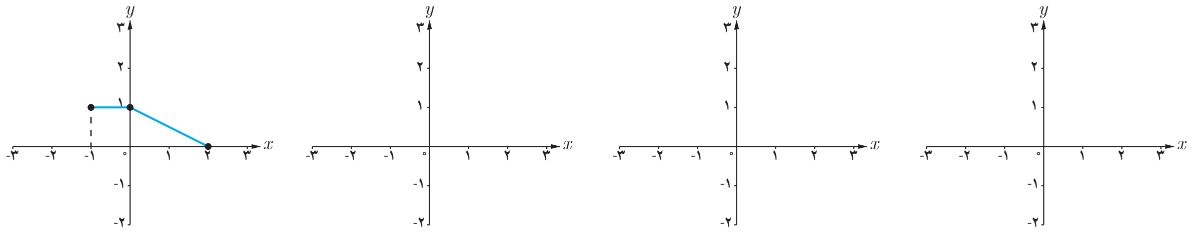
۱ اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب بازه‌های $[a,b]$ و $[c,d]$ باشند به کمک نمودارهای بالا دامنه و برد تابع $y = kf(x)$ را تعیین کنید.

۲ نمودار توابع زیر را به کمک نمودار تابع $y = x^۲$ رسم کنید.

الف) $y = -x^۲$

ب) $y = ۲x^۲ - ۱$

۳ نمودار تابع $y=f(x)$ در زیر رسم شده است. با انجام مراحل زیر، نمودار تابع $y=-f(x-۱)+۲$ را رسم کنید.



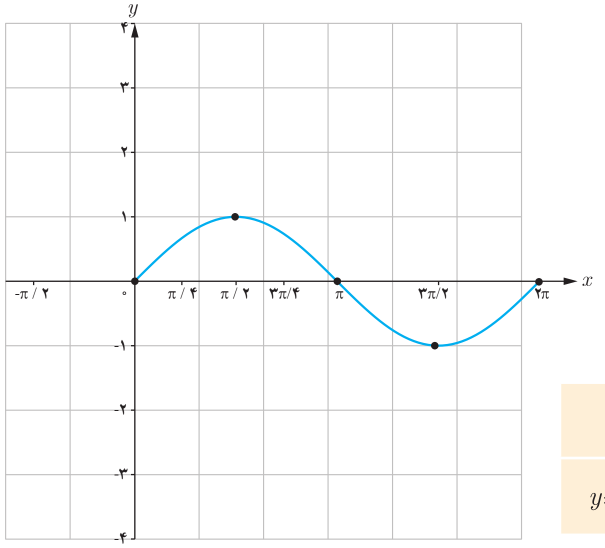
$y=f(x)$ $y=f(x-۱)$ $y=-f(x-۱)$ $y=-f(x-۱)+۲$

انبساط و انقباض افقی

فعالیت

در دستگاه زیر، نمودار تابع $y=\sin x$ در فاصله $[۰,۲\pi]$ رسم شده است.

۱ با تکمیل جدول زیر، نقاطی از نمودار تابع $y=\sin ۲x$ مشخص می‌شود. با کمک این نقاط نمودار این تابع را در فاصله $[۰,\pi]$ رسم کنید.



x	۰	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	π
$y=\sin ۲x$	...	...	...	...	...

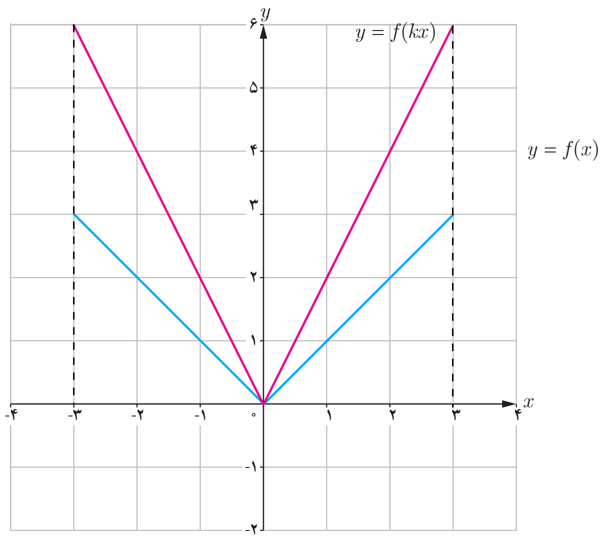
۲ با مقایسه نمودارهای توابع $y=\sin x$ و $y=\sin ۲x$ ، چه تفاوتی بین آنها وجود دارد؟

در حالت کلی اگر (x_0, y_0) یک نقطه دلخواه از نمودارتابع $y=f(x)$ باشد و تابع g به صورت $g(x)=f(kx)$ تعریف شده باشد،

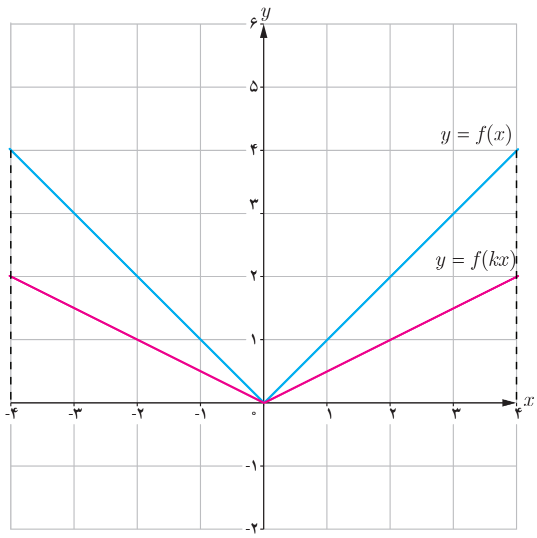
در این صورت :
$$g(\frac{x_0}{k}) = f(k\frac{x_0}{k}) = f(x_0) = y_0$$

بنابراین نقطه $(\frac{x_0}{k}, y_0)$ یک نقطه از نمودار تابع و متناظر با نقطه (x_0, y_0) از نمودار تابع f است.

برای رسم تابع $y=f(kx)$، کافی‌است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.
در شکل های زیر، نمودارتابع $y=f(kx)$ برای دو حالت $k>1$ و $0<k<1$ رسم شده است.



الف) $k>1$



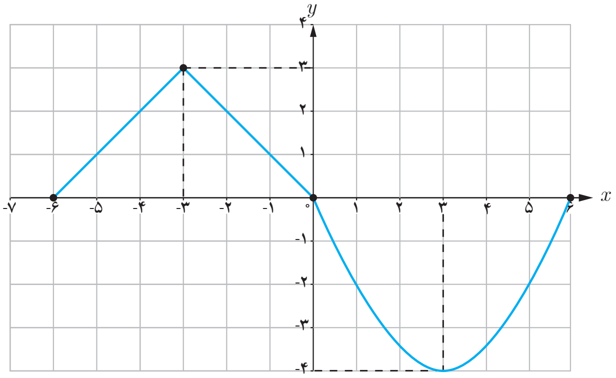
ب) $0<k<1$

اگر $k>1$ باشد، نمودار $y=f(kx)$ از **انقباض افقی** نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به‌دست می‌آید و اگر $0<k<1$ باشد، این نمودار از **انبساط افقی** نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود.

کار در کلاس

۱ اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب بازه‌های $[a,b]$ و $[c,d]$ باشند به کمک نمودارهای بالا دامنه و برد تابع $y = kf(x)$ را تعیین کنید.

۲ اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودارتوابع $y = f(۳x)$ و $y = f(-\frac{x}{۲})$ را رسم کنید.



۳ نمودار توابع زیر را به کمک نمودار تابع $y = \cos x$ رسم کنید.

الف) $y = \cos ۲x - ۱$

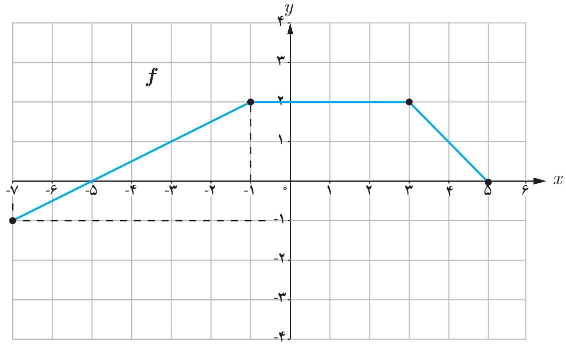
ب) $y = ۲\cos(\frac{x}{۳})$

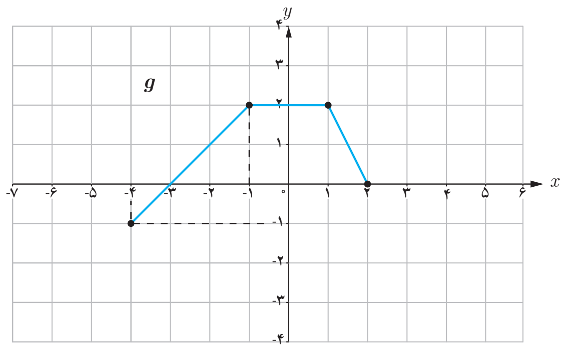
مثال : اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودارتابع $g(x) = f(۲x+۱)$ را به کمک آن رسم می‌کنیم.

اگر $A = (x_۰ , y_۰)$ یک نقطه از نمودار تابع f باشد، سپس $A' = \left(\frac{x_۰ - ۱}{۲}, y_۰\right)$ نقطه متناظر آن روی نمودار تابع g است، زیرا :

$$g\left(\frac{x_۰ - ۱}{۲}\right) = f\left(۲\left(\frac{x_۰ - ۱}{۲}\right) + ۱\right) = f(x_۰ - ۱ + ۱) = f(x_۰) = y_۰$$

بنابراین نقاط مشخص شده در نمودار f را یک واحد به سمت چپ منتقل کرده ، سپس طول آنها را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا نقاط متناظر از g به دست آیند.





تمرین

۱ هر یک از توابع زیر، تبدیل یافته تابع $y=\sqrt{x}$ هستند. هر یک از آنها را به نمودارش نظیر کنید.

الف) $y=\sqrt{۲+x}$

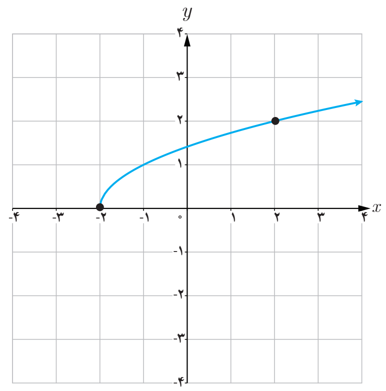
ب) $y=۲+\sqrt{x}$

پ) $y=-۲\sqrt{x}$

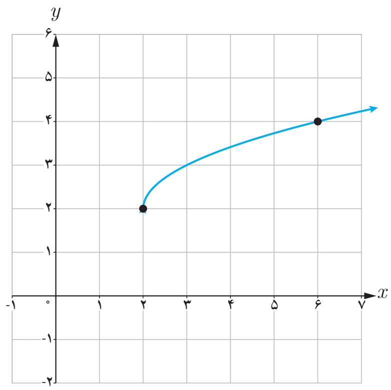
ت) $y=\sqrt{\frac{x}{۲}}$

ث) $y=۲+\sqrt{x-۲}$

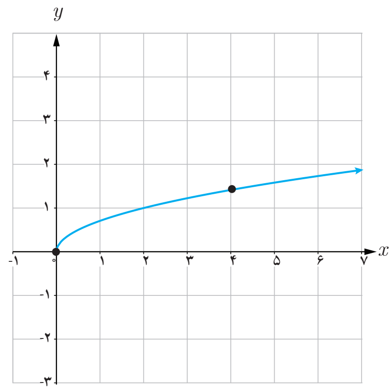
ج) $y=\sqrt{-۲x}$



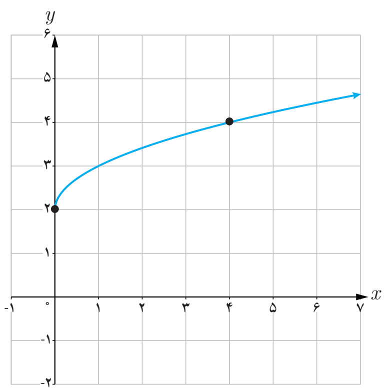
(a)



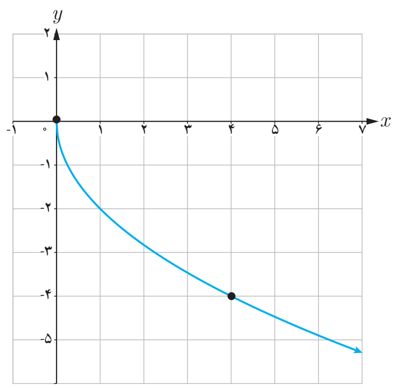
(b)



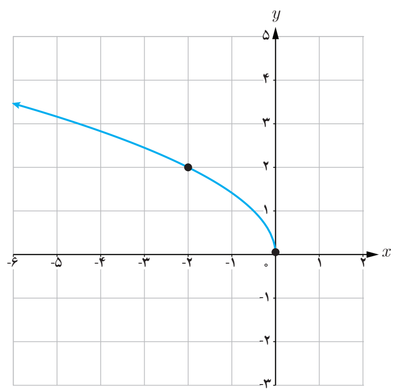
(c)



(d)

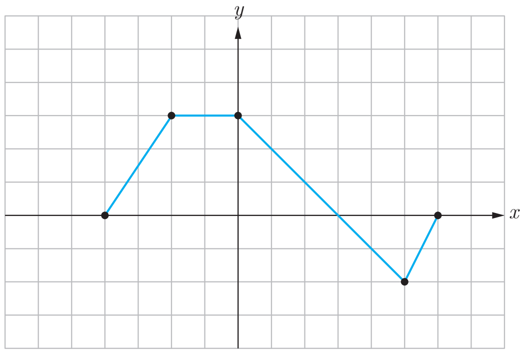


(f)



(e)

۲ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.



الف) $y=f(-x)$

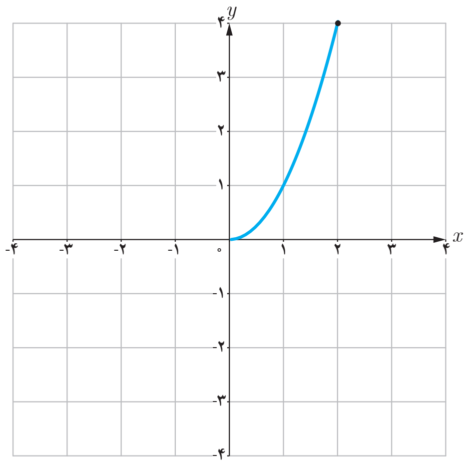
ب) $y=2f(x-1)$

پ) $y=-f(x)+2$

ت) $y=f(2x-1)$

ث) $y=f(3-x)$

۳ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار توابع زیر را رسم کنید و آنها را با نمودار f مقایسه کنید.

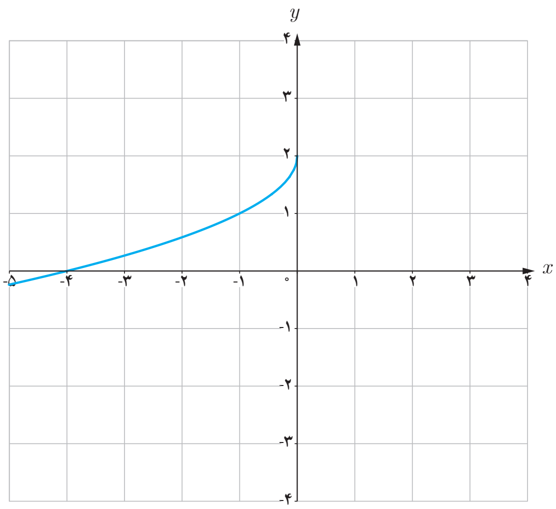


الف) $y=f(-x)$

ب) $y=-f(x)$

پ) $y=-f(-x)$

۴ نمودار تابع مقابل فقط از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ به‌دست آمده است. ضابطه این تابع را بنویسید.



درس ۲

تابع درجه سوم

فرض کنید n یک عدد صحیح نامنفی و $a_۰، a_۱، a_۲، \ldots، a_{n-۱}$ و a_n اعداد حقیقی باشند که $a_n \neq ۰$. تابع $f(x)$ که به صورت زیر تعریف می‌شود، **تابع چند جمله‌ای از درجه** n نامیده می‌شود.[۱]

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \cdots + a_۲ x^۲ + a_۱ x + a_۰$$

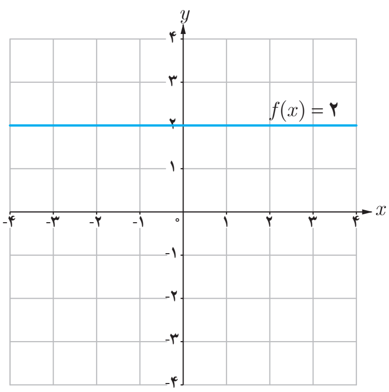
کاردرکلاس

در زیر چند تابع چند جمله‌ای نوشته شده‌اند. درجه هر کدام را مشخص کنید.

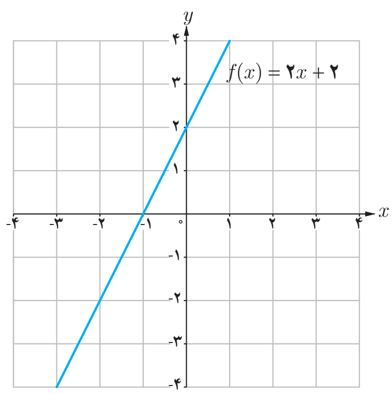
$f(x) = ۲x - ۳$ ، $h(x) = x^۳ + x - ۴$ ، $n(x) = ۲x - x^۴$

$g(x) = (x-۱)^۲ + ۳$ ، $m(x) = ۵$ ، $p(x) = x^۲(۱-x)^۳$

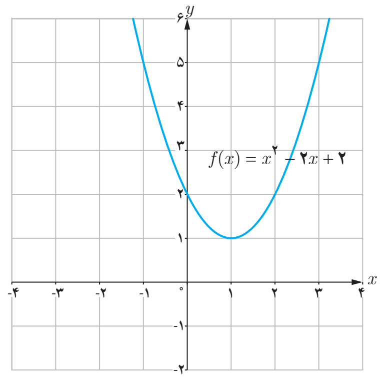
تابع ثابت $f(x) = c$، یک تابع چند جمله‌ای از درجه صفر و تابع خطی $f(x) = mx + b$ که $m \neq ۰$، یک تابع چند جمله‌ای از درجه یک است. به همین ترتیب یک سهمی به معادله $f(x) = ax^۲ + bx + c$ یک چند جمله‌ای از درجه دو است.



تابع درجه صفر



تابع درجه یک



تابع درجه دو

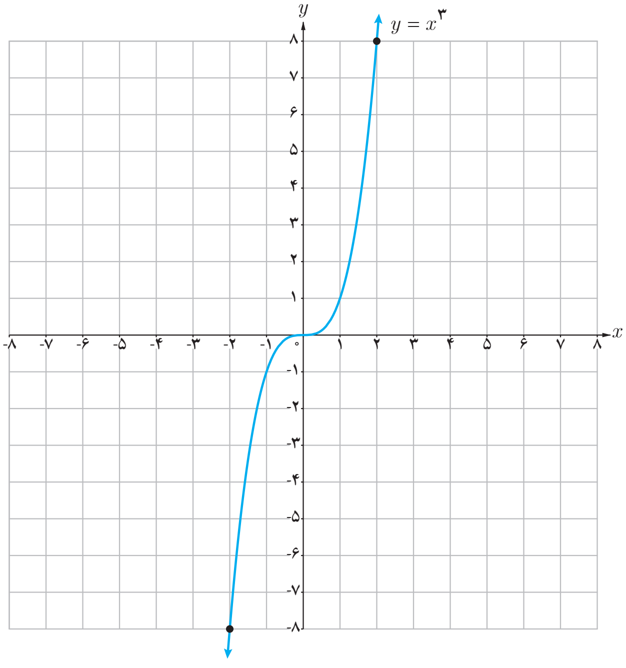
۱ــ برای $f(x)=۰$، درجه تعریف نمی‌شود.

فعالیت

https://t.me/Nader_belalzadeh

یکی از توابع چند جمله‌ای درجه سه، تابع $f(x) = x^۳$ است.

۱ با تکمیل جدول نقاط زیر، نمودار تابع $f(x) = x^۳$ رسم شده است.



x	$y = x^۳$
۲-	$(-۲)^۳ = -۸$
۱-	$(-۱)^۳ = -۱$
۰	۰
۱	۱
۲	$۲^۳ = ۸$

۲ به کمک نمودار رسم شده برای تابع $f(x) = x^۳$، نشان دهید که این تابع وارون‌پذیر است.

۳ نمودار تابع $f^{-۱}$ را رسم کنید و ضابطه $f^{-۱}$ را تعیین کنید.

کار در کلاس

۱ نمودار هر یک از توابع را به کمک نمودار تابع $y = x^۳$ رسم کنید.

الف) $y = (x+۱)^۳$

ب) $y = -x^۳+۱$

پ) $y = x^۲-۳x^۳+۳x$

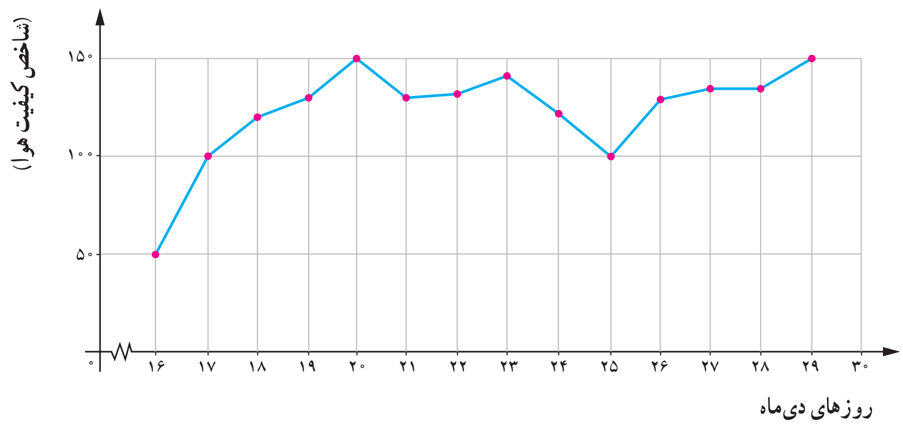
۲ نمودار هر یک از توابع $y = x$، $y = x^۲$ و $y = x^۳$ را در فاصله $[۰,۲]$ رسم کنید.

در فاصله $[۰,۱]$، نمودار کدام تابع از همه پایین‌تر و نمودار کدام تابع از همه بالاتر است؟ در فاصله $[۰,۲]$ چطور؟

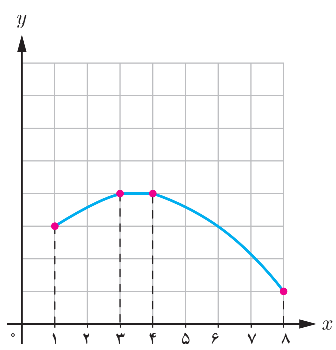
توابع صعودی و نزولی

فعالیت

تنفس هوای پاک در شهرهای صنعتی یکی از آرزوهای ساکنین این شهرهاست. براساس شاخص کیفیت هوا (AQI)، کیفیت هوای یک منطقه یکی از وضعیت‌های پاک، سالم، ناسالم برای گروه‌های حساس، ناسالم، بسیار ناسالم و خطرناک می‌باشد. نمودار زیر، میانگین شاخص کیفیت هوا در ۱۵ روز پایانی دی ماه سال ۱۳۹۵ در شهر تهران را نشان می‌دهد.



الف) در چه روزهایی شاخص کیفیت هوا در بالاترین و پایین‌ترین مقدار بوده است؟
ب) شاخص کیفیت هوا در چه فاصله زمانی روبه افزایش بوده است؟
پ) شاخص کیفیت هوا در چه فاصله زمانی روبه کاهش بوده است؟
ت) این شاخص در چه فاصله زمانی ثابت بوده است؟

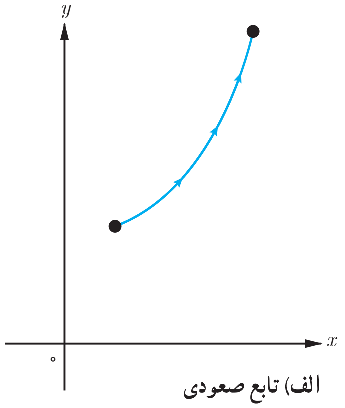


دامنه تابع f که در شکل مقابل دیده می‌شود، بازه $[1,8]$ است. در بازه $[1,3]$، همزمان با افزایش x، نمودار تابع روبه بالا می‌رود. به همین خاطر به تابع f در بازه $[1,3]$ صعودی می گوییم. در بازه $[3,4]$ مقدار تابع ثابت است.

در ادامه و در بازه $[4,8]$، همزمان با افزایش x، نمودار تابع روبه پایین می‌رود و به همین منظور به تابع f در بازه $[4,8]$ نزولی اطلاق می‌شود.

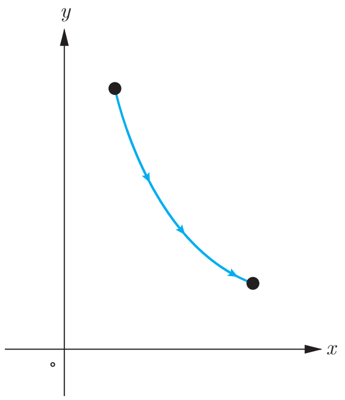
توابع اکیداً یکنوا

✤ تابع f را در یک بازه، **اکیداً صعودی** می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این بازه که $a < b$، آنگاه $f(a) < f(b)$. در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً صعودی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره روبه بالا خواهیم رفت. (شکل الف)



الف) تابع صعودی

✤ تابع f را در یک بازه، **اکیداً نزولی** می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این بازه که $a < b$، آنگاه $f(a) > f(b)$. در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً نزولی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره روبه پایین خواهیم رفت. (شکل ب)

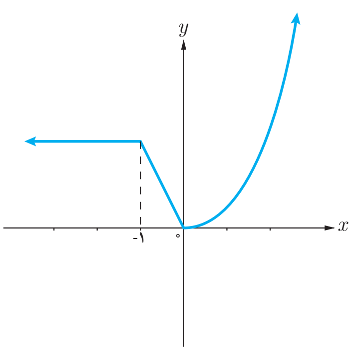


ب) تابع نزولی

✤ تابع f را در یک بازه، **ثابت** می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر x در این بازه، $f(x)$ یک مقدار ثابت باشد.

به تابعی که در یک بازه، اکیداً صعودی و یا اکیداً نزولی باشد، **اکیداً یکنوا** می‌گوییم.

✤ **مثال :** نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. در فاصله $(-\infty,-1]$ تابع f ثابت است. همچنین در فاصله $[-1,0]$ تابع اکیداً نزولی و در فاصله $[0,+\infty)$ تابع اکیداً صعودی است.



کار در کلاس

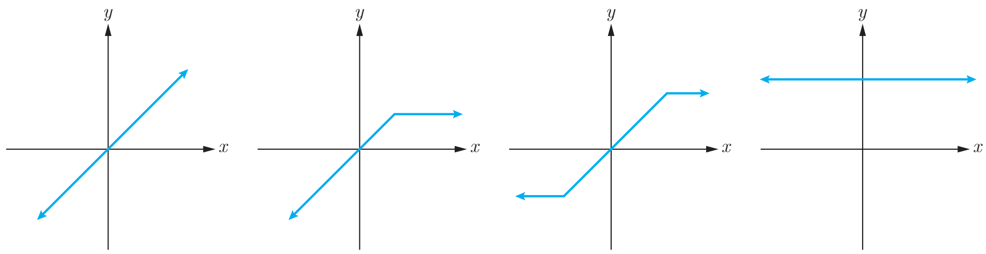
نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = x^{۲} + ۲x \quad , \quad g(x) = ۲^{-x} \quad , \quad h(x) = |x + ۲|$$

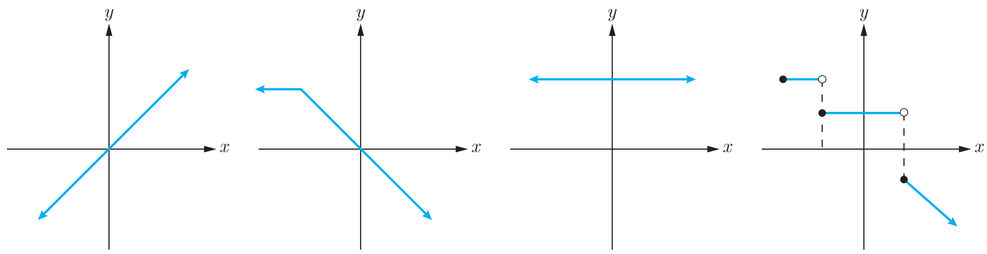
الف) در چه بازه‌هایی این توابع، اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند؟
ب) کدام یک از آنها در تمام دامنه خود، اکیداً یکنوا است؟

تابع یکنوا

تابع f را در یک بازه، **صعودی** می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این بازه که $a < b$، آنگاه $f(a) \leq f(b)$. در فاصله‌ای که یک تابع صعودی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، روبه پایین نخواهیم رفت. نمودارهای زیر همگی مربوط به توابع صعودی‌اند.



تابع f را در یک بازه، **نزولی** می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این بازه که $a < b$، آنگاه $f(a) \geq f(b)$. در فاصله‌ای که یک تابع نزولی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، روبه بالا نخواهیم رفت. نمودارهای زیر همگی مربوط به توابع نزولی‌اند.



کار در کلاس

۱ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq -1 \\ 2 & x<-1 \end{cases}$ را رسم کنید. در چه فاصله‌هایی این تابع صعودی و در چه فاصله‌هایی نزولی است.

۲ الف) اگر تابع f در یک فاصله اکیداً صعودی باشد، آیا صعودی نیز هست؟

ب) اگر تابع f در یک فاصله صعودی باشد، آیا اکیداً صعودی نیز خواهد بود؟

۳

الف) فرض کنید تابع f در یک فاصله اکیداً صعودی باشد و a و b متعلق به این فاصله باشند. اگر $f(a)\leq f(b)$ نشان دهید که $a\leq b$.

ب) اگر $\log(2x-3)\leq \log(x+1)$، حدود x را به‌دست آورید.

بخش‌پذیری و تقسیم

فعالیت

با تقسیم چند جمله‌ای‌ها بر یکدیگر آشنا هستید. توابع چند جمله‌ای $f(x)=x^3-3x^2+1$ و $p(x)=x^2-2$ را درنظر می‌گیریم.

الف) اگر $q(x)$ و $r(x)$ به ترتیب خارج قسمت و باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $p(x)$ باشند. نشان دهید که $q(x)=x-3$ و $r(x)=2x-5$.

ب) درستی تساوی $f(x)=p(x)q(x)+r(x)$ را بررسی کنید.

قضیه تقسیم برای چند جمله‌ای‌ها

اگر $f(x)$ و $p(x)$ توابع چند جمله‌ای باشند و درجه $p(x)$ از صفر بزرگ‌تر باشد، آنگاه توابع چند جمله‌ای منحصر بفرد $q(x)$ و $r(x)$ وجود دارند به‌طوری که :

$$f(x)=p(x)q(x)+r(x)$$

که در آن درجه $r(x)$ از درجه $p(x)$ کمتر است.

(اگر $r(x)=0$ باشد، تابع f بر تابع p بخش‌پذیر است.)

کار در کلاس

اگر $f(x) = x^{۴} - ۱۶$ و $p(x) = x + ۲$، نشان دهید که $f(x)$ بر $p(x)$ بخش‌پذیر است.

فعالیت

در یک تقسیم، $f(x) = x^{۳} + ۲$ و $p(x) = ۲x - ۱$ به ترتیب مقسوم و مقسوم‌علیه هستند.

الف) اگر $r(x)$ باقی‌مانده تقسیم باشد، نشان دهید که درجه باقیمانده صفر است.

ب) اگر $r(x)$ باقی‌مانده و $q(x)$ خارج قسمت این تقسیم باشد، با توجه به قضیه تقسیم، می‌توان نوشت :

$$f(x) = (۲x - ۱)\ q(x) + r(x)$$

اکنون ریشه چند جمله‌ای $p(x) = ۲x - ۱$ را به‌دست آورده و با قرار دادن آن در رابطه بالا نشان دهید که $r(x) = f(\frac{۱}{۲})$.

قضیه : باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $ax + b$ عبارت‌است از $r(x) = f(\frac{-b}{a})$.

کار در کلاس

۱ باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای $x^{۳} + x - ۲$ را بر $۲x + ۱$ به‌دست آورید.

۲ اگر چند جمله‌ای $x^{۲} + ax - ۲$ بر $x - a$ بخش‌پذیر باشد، مقدار a را تعیین کنید.

فعالیت

با اتحادهای زیر از سال‌های قبل، آشنا هستید.

$$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a) \quad \text{و} \quad (x^3 - a^3) = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$$

۱ از تقسیم $x^4 - a^4$ بر $x-a$ نشان دهید که :

$$x^4 - a^4 = (x-a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3)$$

۲ آیا $x^n - a^n$ $(n \in \mathbb{N})$ بر $x-a$ بخش‌پذیر است؟

۳ از تقسیم $x^n - a^n$ بر $x-a$ نشان دهید که $x^n - a^n$ به صورت زیر تجزیه می‌شود.

$$\boxed{x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1})}$$

۴ چند جمله‌ای‌های $x^5 - 1$ و $x^6 - 64$ را به کمک اتحاد بالا تجزیه کنید.

کار در کلاس

۱ در اتحاد بالا، اگر n فرد باشد، با تغییر a به $-a$ اتحاد زیر را نتیجه بگیرید.

$$x^n + a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \cdots - a^{n-2}x + a^{n-1})$$

به کمک این اتحاد، چند جمله‌ای $x^5 + 1$ را تجزیه کنید.

۲ در فعالیت بالا، اگر n زوج باشد، با تغییر a به $-a$ اتحاد زیر را نتیجه بگیرید.

$$x^n - a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \cdots + a^{n-2}x - a^{n-1})$$

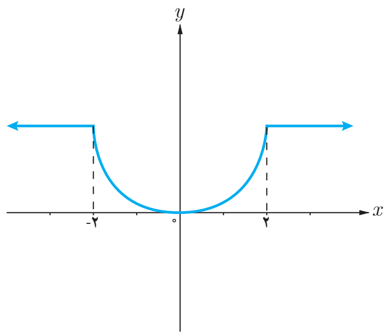
به کمک این اتحاد، چند جمله‌ای $x^4 - 16$ را برحسب $x + 2$ تجزیه کنید.

تمرین

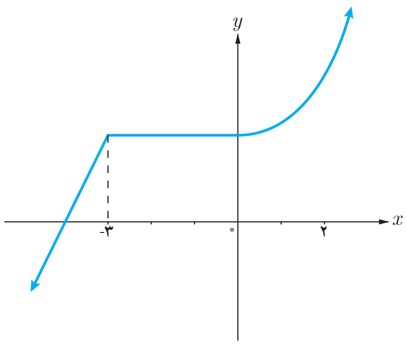
۱ تابع $f(x) = (x-۲)^۳ + ۱$ را درنظر بگیرید.

الف) نمودار تابع f را به کمک نمودار تابع $y = x^۳$ رسم کنید.
ب) نشان دهید که f وارون‌پذیر است و نمودار $f^{-۱}$ را رسم کنید.
پ) ضابطه $f^{-۱}$ را به‌دست آورید.

۲ نمودار توابع f و g در زیر رسم شده‌اند.



$y = g(x)$



$y = f(x)$

الف) تابع f در چه فاصله‌هایی اکیداً صعودی و در چه فاصله‌هایی صعودی است؟
ب) تابع g در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟

۳ نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. کدام یک از آنها در تمام دامنه خود، اکیداً یکنواست؟

الف) $f(x) = \sqrt{۲ - x}$

ب) $g(x) = \dfrac{۱}{x + ۲}$

ج) $h(x) = \log_۲ x$

۴ آیا تابعی وجود دارد که در یک فاصله، صعودی و هم نزولی باشد؟

۵ اگر توابع f و g در یک فاصله اکیداً صعودی باشند، نشان دهید که تابع $f + g$ نیز در این فاصله اکیداً صعودی است؟ برای تابع $f - g$ چه می‌توان گفت؟

۶ اگر باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای $x^۳ + kx^۲ + ۲$ بر $x - ۲$ برابر با ۶ باشد، k را تعیین کنید.

۷ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $x^۳ + ax^۲ + bx + ۱$ بر $x - ۲$ و $x + ۱$ بخش‌پذیر باشد.

۸ هر یک از چند جمله‌ای‌های زیر را برحسب عبارت خواسته شده تجزیه کنید.

الف) $x^۶ - ۱$ برحسب $x - ۱$

ب) $x^۶ - ۱$ برحسب $x + ۱$

پ) $x^۵ + ۳۲$ برحسب $x + ۲$

۹ الف) فرض کنید تابع f در یک بازه اکیداً نزولی باشد و a و b متعلق به این بازه باشند. اگر $f(a) \le f(b)$ نشان دهید که $a \ge b$.

ب) اگر $\frac{۱}{۶۴} \le (\frac{۱}{۲})^{۳x-۲}$، حدود x را به‌دست آورید.

مثلثات

فصل ۲

۱ تناوب و تابع تانژانت

درس ۱

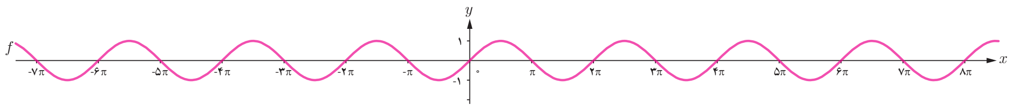
تناوب و تابع تانژانت

درستی رابطه $\sin(2k\pi \pm x) = \sin x$ را در سال گذشته دیدیم (یادآور می‌شویم که رابطه مشابهی برای $\cos x$ نیز برقرار است). همچنین مشاهده شد که این رابطه باعث تکرار شدن تابع $y=\sin x$ بر بازه‌های به طول 2π باشد. اکنون این خاصیت را برای توابع مثلثاتی $y=\sin ax$ و $y=\cos ax$ بررسی می‌کنیم. ابتدا تابع $y=\sin x$ را دقیق‌تر بررسی می‌کنیم.

در سال گذشته آموختیم که توابع مثلثاتی خاصیت تکرار شونده دارند. در این درس می‌خواهیم به این خاصیت با دقت بیشتری بپردازیم و تأثیر این خاصیت را بر رفتار توابع مثلثاتی بررسی کنیم. برای این منظور ابتدا تابع $y=\sin(x)$ را بررسی می‌کنیم.

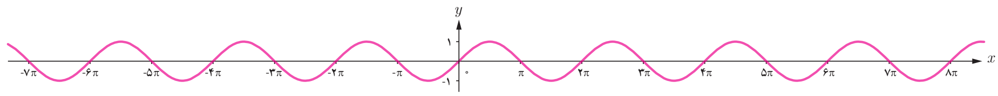
فعالیت

۱ نمودار تابع $y=\sin(x)$ در زیر داده شده است.

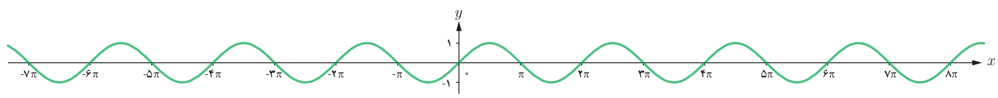


نمودار فوق را با مقادیر مختلف به سمت راست یا چپ انتقال داده‌ایم و نمودارهای زیر به‌دست آمده‌اند.

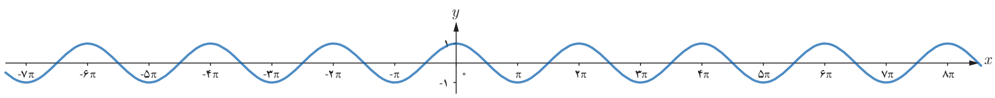
$y=\sin(x+۲\pi)$



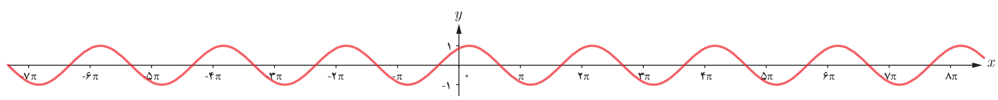
$y=\sin(x+۴\pi)$



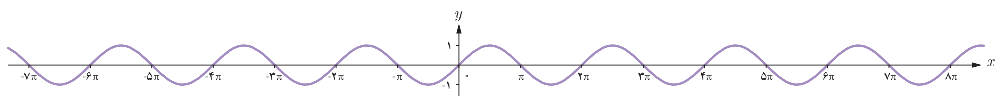
$y=\sin(x+\frac{\pi}{۲})$



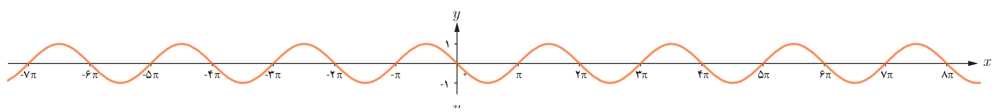
$y=\sin(x+\frac{\pi}{۳})$



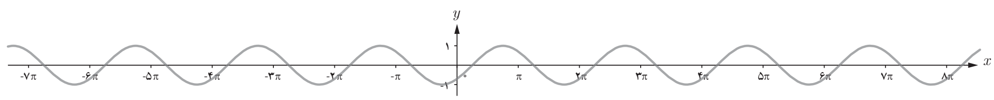
$y=\sin(x-۲\pi)$



$y=\sin(x-\pi)$



$y=\sin(x-\frac{\pi}{۴})$

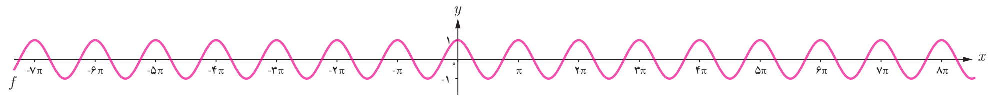


الف) از روی شکل بررسی کنید کدام یک از نمودارهای فوق با نمودار تابع $y=\sin(x)$ منطبق می‌شود؟

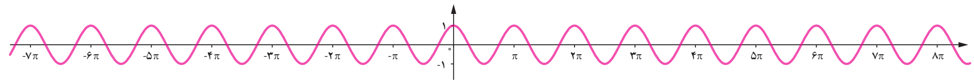
ب) نمودارهایی که بر نمودار تابع $y=\sin(x)$ منطبق می‌شوند با چه مقادیری انتقال داده شده‌اند؟ کوچک‌ترین آنها از نظر قدرمطلق چند است؟

۲ همانند سؤال قبل تابع $y=\cos(۲x)$ همراه با چند انتقال آن در زیر داده شده‌اند. بررسی کنید که کوچک‌ترین مقدار انتقال از نظر قدرمطلق چند باشد تا نمودار بر خودش منطبق شود.

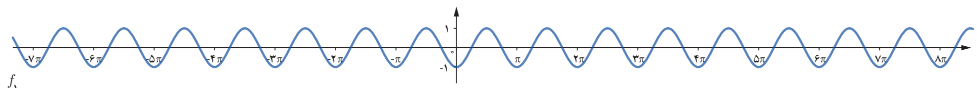
$y=\cos(۲x)$



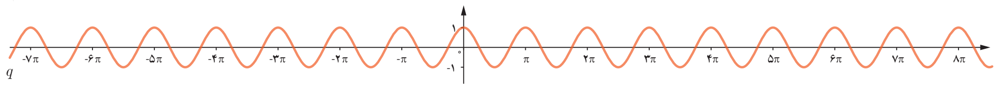
$y=\cos(۲x+۲\pi)$



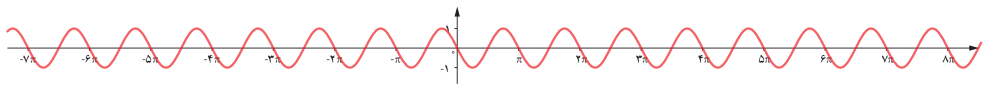
$y=\cos(۲x+۳\pi)$



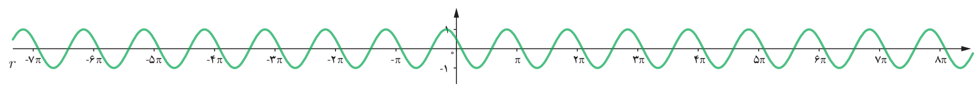
$y=\cos(۲x+۴\pi)$



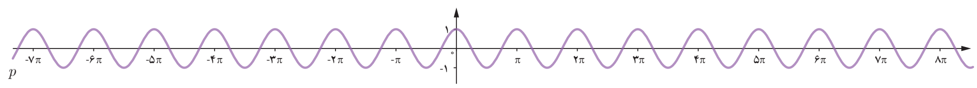
$y=\cos(۲x+\frac{\pi}{۲})$



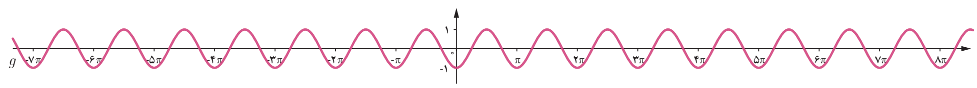
$y=\cos(۲x+\frac{\pi}{۳})$



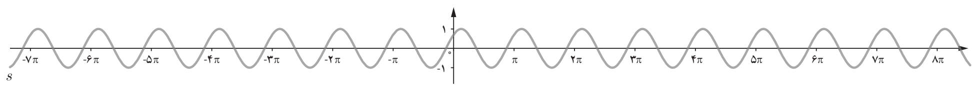
$y=\cos(۲x-۲\pi)$



$y=\cos(۲x-\pi)$



$y=\cos(۲x-\frac{\pi}{۴})$



۳ تابع $y=\sin(۳x)$ را همراه با چند انتقال آن همانند سؤالات قبل رسم کنید. سپس بررسی کنید که کوچک‌ترین مقدار انتقال از نظر قدرمطلق چند باشد تا نمودار بر خودش منطبق شود.

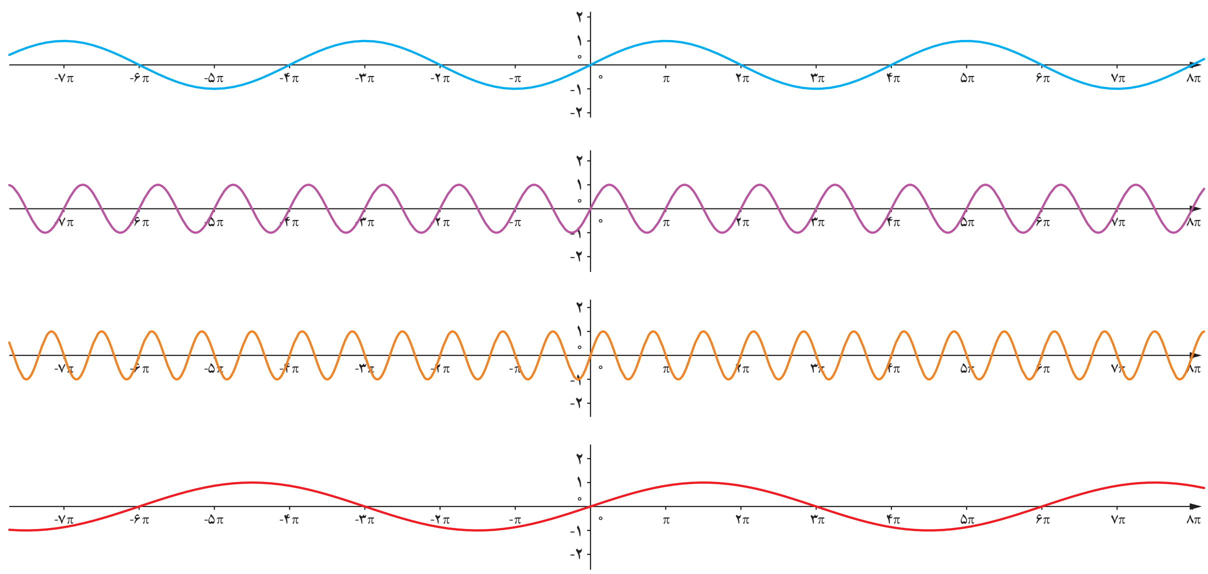
کار در کلاس

۱ دوره تناوب هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x)=\sin ۴x$ ب) $g(x)=\cos \sqrt{۲}x$

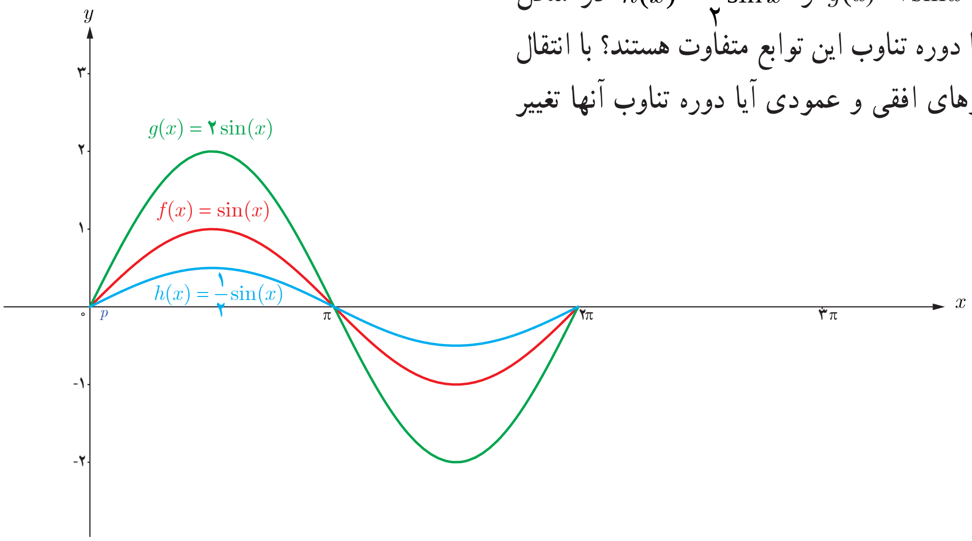
پ) $h(x)=\sin \frac{x}{۲}$ ت) $s(x)=\sin \pi x$

۲ می‌دانیم ریشه‌های تابع $y=\sin x$ به صورت $x=k\pi$ که $k\in \mathbb{Z}$ می‌باشند. نمودار توابع $f(x)=\sin\frac{x}{۲}$ ، $m(x)=\sin ۳x$، $g(x)=\sin ۲x$ و $n(x)=-\sin —$ در زیر آمده است. با توجه به ریشه‌های این توابع، در مورد ریشه‌های $y=\sin ax$ چه حدسی می‌زنید؟



۳ با توجه به دوره تناوب تابع $y=\sin ax$ در مورد مکان نقاط ماکزیمم این تابع چه حدسی می‌زنید؟ (از نمودارهای سؤال ۲ کمک بگیرید).

۴ توابع $f(x)=\sin x$، $g(x)=۲\sin x$ و $h(x)=\frac{۱}{۲}\sin x$ در شکل روبه‌رو رسم شده‌اند. آیا دوره تناوب این توابع متفاوت هستند؟ با انتقال این توابع بر روی محورهای افقی و عمودی آیا دوره تناوب آنها تغییر می‌کند؟



از کار در کلاس صفحه قبل می‌توان دریافت که ضرب یک تابع متناوب در یک عدد و نیز انتقال آن در دوره تناوب تأثیری ندارد اما در برد آن مؤثر است.

> به‌طور کلی توابع مثلثاتی به‌صورت $y=a\sin(bx+c)+d$ و $y=a\cos(bx+c)+d$ که در آنها d، c، b، a اعداد حقیقی $(a,b\neq ۰)$ می‌باشند، توابعی متناوب با دوره تناوب $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ هستند.

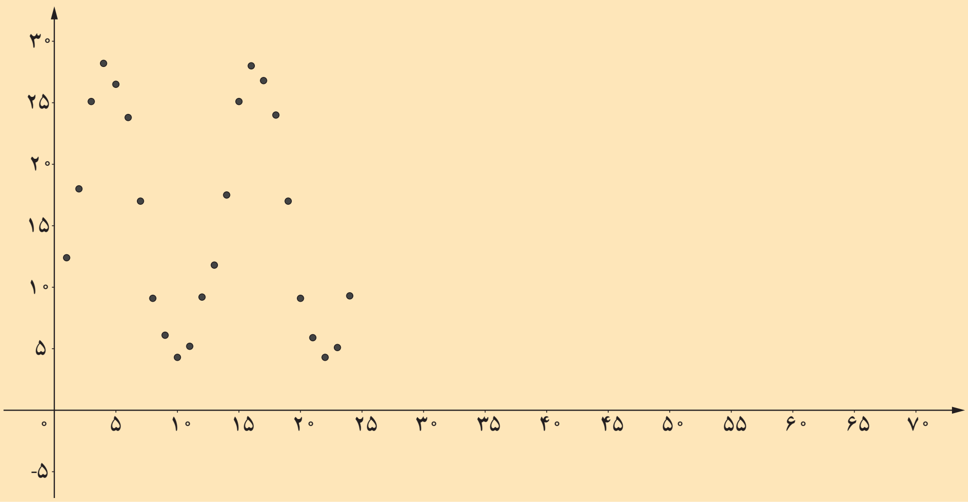
توابع متناوب[۱] برای مدل سازی پدیده‌هایی که تکرار می‌شوند به‌کار می‌روند. برای مدل‌سازی چنین پدیده‌هایی کافی است داده‌های یک دوره تناوب آن را داشت و آن‌گاه می‌توان آن پدیده را برای زمان‌های آتی پیش‌بینی کرد. معمولاً برای اطمینان از درستی یک مدل مثلثاتی داده‌های دو یا چند دوره تناوب یک پدیده را به‌دست می‌آورند. در ادامه چند مثال در این رابطه آمده است.

مثال ۱ : داده‌های دمای یک شهر در ماه‌های مختلف برای دو سال پیاپی (۲۴ ماه) به صورت زیر ثبت شده اند (فروردین را با شماره ۱، اردیبهشت را با شماره ۲ و ... نمایش داده‌ایم). نمودار این داده‌ها به‌صورت زوج مرتب نیز رسم شده است.

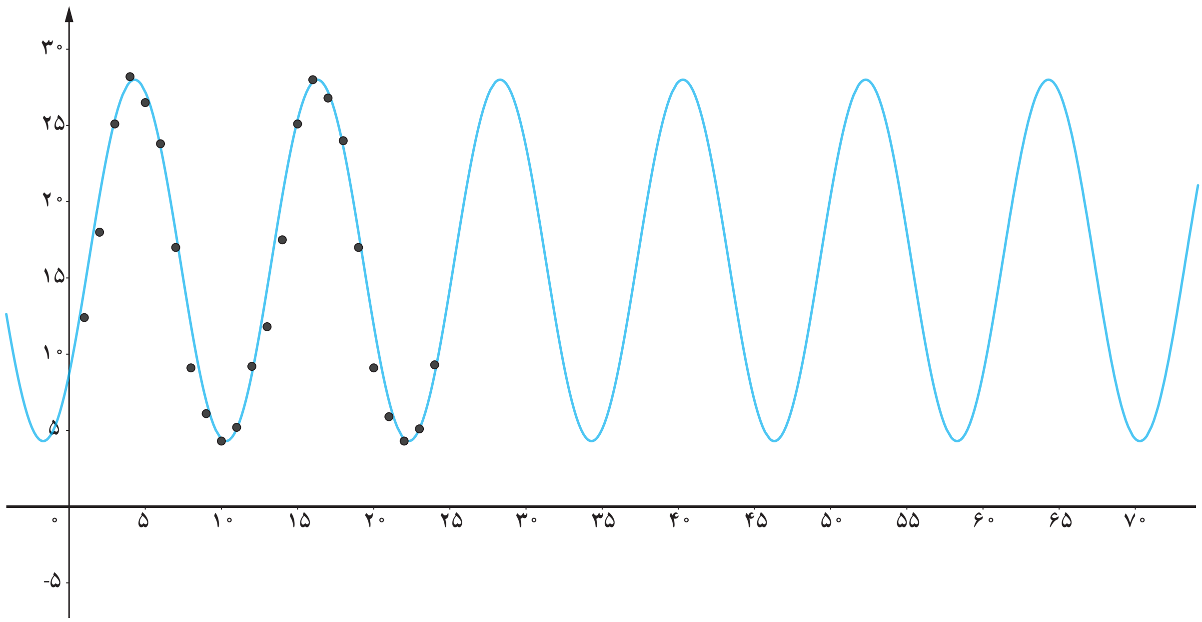
	داده‌های سال اول											
ماه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
دما	۱۲/۴	۱۸	۲۵/۱	۲۸	۲۶/۵	۲۳/۸	۱۷	۹/۱	۶/۱	۴/۳	۵/۲	۹/۲

۱ــ در این کتاب تنها به تناوب توابع مثلثاتی که به‌صورت گفته شده در کادر فوق می‌باشند می‌پردازیم.

	داده‌های سال دوم											
ماه	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴
دما	۱۱/۸	۱۷/۵	۲۵/۱	۲۸	۲۶/۸	۲۴	۱۷	۹/۱	۵/۹	۴/۳	۵/۱	۹/۳



با کمی دقت متوجه می‌شویم که دوره تناوب داده‌های بالا $T=۱۲$ است زیرا که داده‌ها هر ۱۲ ماه یک بار تکرار شده‌اند. با اندکی محاسبات می‌توان تابعی مثلثاتی که تقریباً متناسب با داده‌های فوق است ارائه داد. تابع $T(t)=۱۱/۸۵\sin(\frac{\pi}{۶}t)+۱۶/۱۵$ را که در آن t شماره ماه می‌باشد داده‌ها را به خوبی تقریب می‌زند. این تابع در زیر رسم شده است. اکنون از این تابع می‌توان برای پیش بینی دمای ماه‌های آتی استفاده نمود.



برای به‌دست آوردن این تابع تقریبی ابتدا با توجه به اینکه داده‌ها شبیه به یک موج سینوسی هستند حالت کلی یک موج سینوسی به‌صورت $T(t)=a\sin(bt)+c$ در نظر می‌گیریم و با توجه به داده‌ها مقادیر مجهول c، b، a به‌صورت زیر می‌یابیم. با توجه به اینکه دوره تناوب داده‌ها ۱۲ است پس داریم :

$$\frac{۲\pi}{b}=۱۲\rightarrow b=\frac{\pi}{۶}$$

برای به‌دست آوردن a که معمولاً به آن دامنه موج گفته می‌شود از دامنه تغییرات داده‌ها استفاده می‌شود، یعنی کافی است تفاضل بیشترین و کمترین داده‌ها را بر ۲ تقسیم کنیم. پس خواهیم داشت :

$$a=\frac{۲۸-۴/۳}{۲}=۱۱/۸۵$$

برای به‌دست آوردن مقدار c کافی است میانگین بیشترین و کمترین مقدار را بیابیم، یعنی داریم :

$$c=\frac{۲۸+۴/۳}{۲}=۱۶/۱۵$$

✤ **مثال ۲ :** مجموعه‌ای از داده‌های مربوط به دمای هوای یک شهر داده شده‌اند. اگر داده‌های این شهر هر ۱۲ ماه یک بار تکرار شده باشند و بیشترین و کمترین دما در داده‌ها به ترتیب ۲۸ و ۱۵ درجه سانتی‌گراد باشند، آنگاه با فرض اینکه تابعی کسینوسی به‌صورت $y=a\cos(bx)+c$ برای داده مناسب به‌نظر می‌رسد، این تابع را بیابید.

$$\frac{۲\pi}{b}=۱۲\rightarrow b=\frac{\pi}{۶}$$

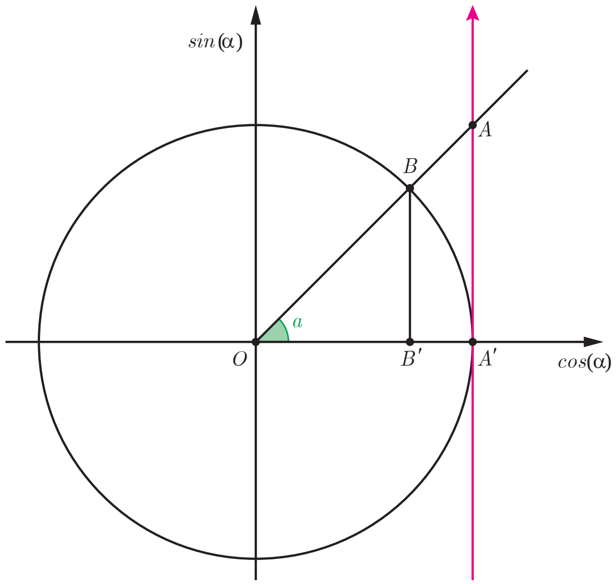
$$a=\frac{۲۸-۱۵}{۲}=۶/۵$$

$$c=\frac{۲۸+۱۵}{۲}=۲۱/۵$$

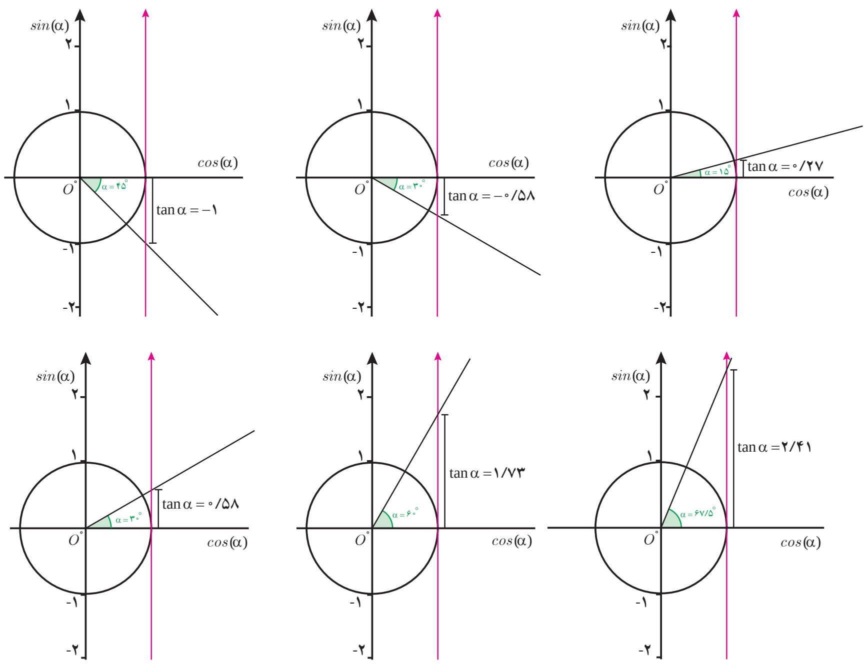
تابع تانژانت

در دایره مثلثاتی روبه‌رو زاویه α و نیز محورهای سینوس‌ها و کسینوس‌ها مشخص شده‌اند. اکنون اگر خط $x=1$ را که بر دایره مثلثاتی مماس بوده رسم کنیم تا امتداد OB را در نقطه A قطع کند آن‌گاه اندازه پاره‌خط AA' برابر تانژانت زاویه α می‌باشد زیرا که طبق قضیه تالس داریم :

$$\frac{OB'}{OA'}=\frac{BB'}{AA'} \rightarrow AA'=\frac{BB'}{OB'}=\tan\alpha.$$



از این رو محور عمودی مماس بر دایره را محور تانژانت می‌نامند. در دایره‌های مثلثاتی زیر از چپ به راست زاویه α در حال افزایش است و تانژانت آن نیز بر روی محور تانژانت مشخص شده است. به نظر شما وقتی که زاویه α به زاویه 90° نزدیک می‌شود مقدار تانژانت آن چگونه تغییر می‌کند؟



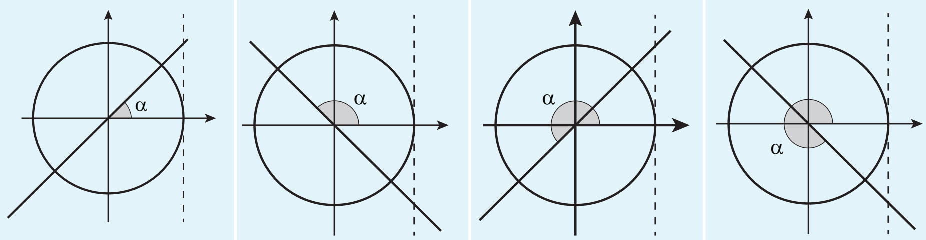
در فعالیت زیر تغییرات تابع $y=\tan\alpha$ را از $x=0$ تا $x=2\pi$ به کمک محور تانژانت و نیز جدول مقادیر تانژانت که از سال‌های قبل فراگرفته‌اید بررسی می‌کنیم و نمودار تابع تانژانت را به دست می‌آوریم.

فعالیت

۱ در ردیف الف ازجدول زیر صعودی و نزولی بودن $\tan\alpha$ را با توجه به محور تانژانت در هر بازه تعیین نمایید.

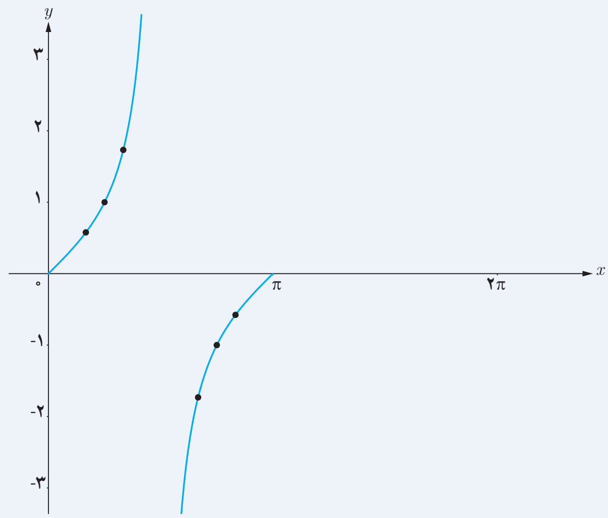
۲ در ردیف ب از جدول زیر مقدار $\tan\alpha$ را به ازای مقادیر داده شده از α به دست آورید $(\sqrt{3}\simeq 1/7\ ,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\simeq 0/58)$.

۳ در ردیف پ نمودار تابع $y=\tan\alpha$ را با استفاده از نقاط کمکی ردیف ب و نیز تغییرات به‌دست آمده در ردیف الف تکمیل کنید.

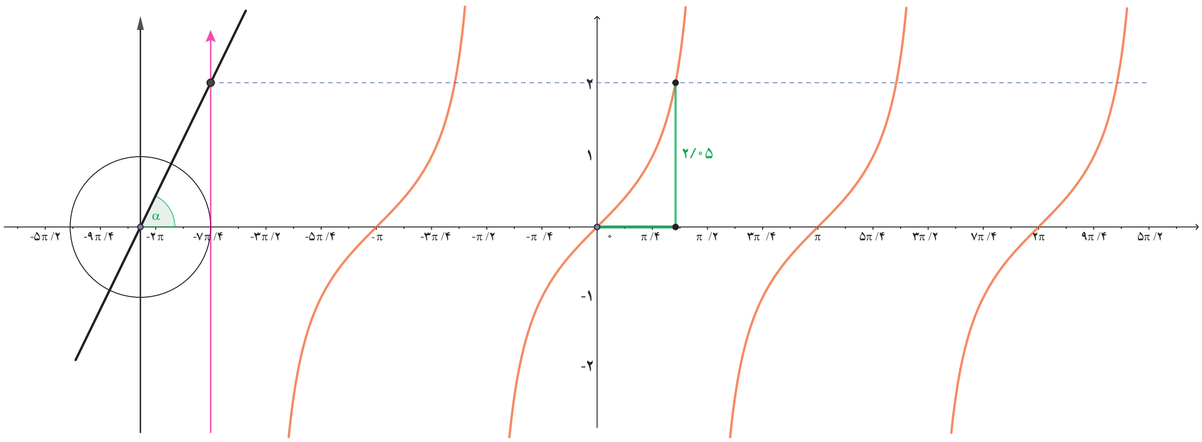
α	$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$	π	$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$
الف	 صعودی		....		....		....

ب														
α	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
tanα	۰	۰/۵۸												

پ



همان‌طور که در فعالیت قبل بررسی شد تابع مثلثاتی y=tanα برای مقادیر $x' = \frac{k\pi}{2}$ تعریف می‌شود و نمودار آن در بازه $[-\frac{3\pi}{2}, \frac{9\pi}{4}]$ به صورت زیر است. همچنین محور مماس بر دایره مثلثاتی را که به موازات محورyها (محور سینوس) است، محور تانژانت می‌نامند چرا که محل تقاطع ضلع پایانی زاویه α با آن محور بیانگر tanα است. در زیر ارتباط این محور با تابع تانژانت نیز مشخص شده است.



کار در کلاس

۱ آیا تابع y=tan$x$ در بازه $[0, 2\pi]$ یکنواست؟

۲ با توجه به روابط مثلثاتی سال گذشته نمودار تابع y=tan$x$ را به بازه‌های بزرگ‌تر از π و کوچک‌تر از π− گسترش دهید. آیا تابع y=tan$x$ متناوب است؟ اگر بلی دوره تناوب آن را به دست آورید.

۳ با توجه به نمودار تابع y=tan$x$ دامنه و برد این تابع را بیابید.

تمرین

۱ دوره تناوب هر یک از توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $y=۱+۲\sin ۷x$

ب) $y=\sqrt{۳}-\cos\frac{\pi}{۲}x$

پ) $y=-\pi\sin\frac{۱}{۲}(x-۲)$

ت) $y=-\pi+\sqrt{۲}\tan ۳x$

۲ هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

الف) $y=\sin\pi x$

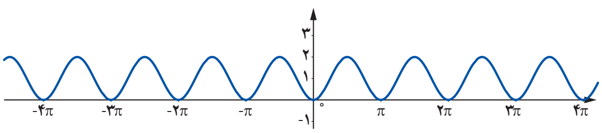
ب) $y=۲-\cos\frac{۱}{۲}x$

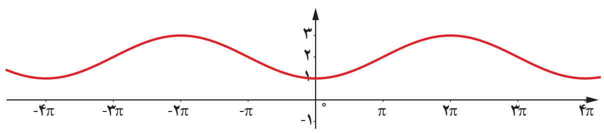
پ) $y=۱-\cos ۲x$

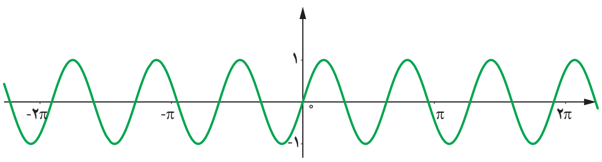
ت) $y=-\frac{۱}{۲}\tan ۲x$

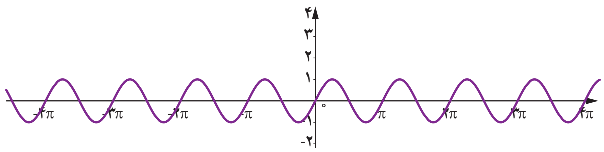
ث) $y=\sin ۲x$

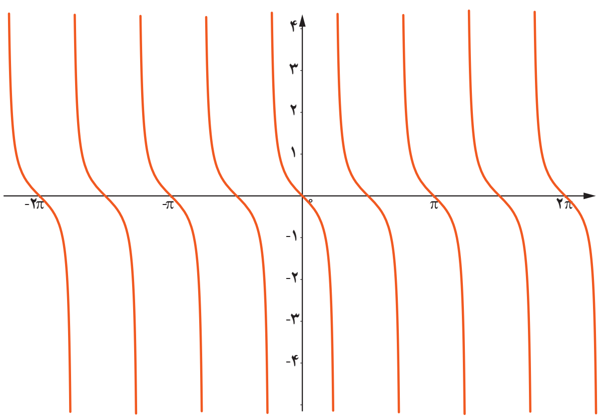
ج) $y=\tan\frac{۱}{۲}x$

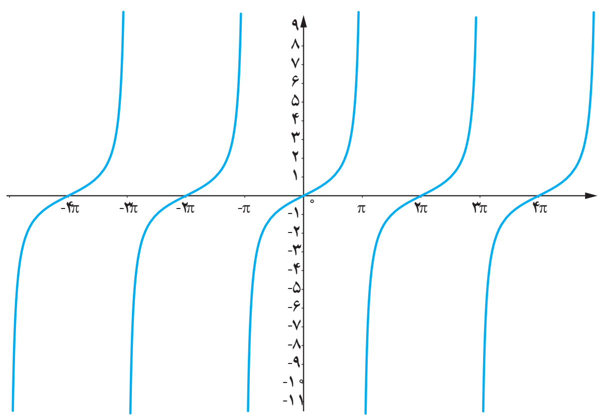








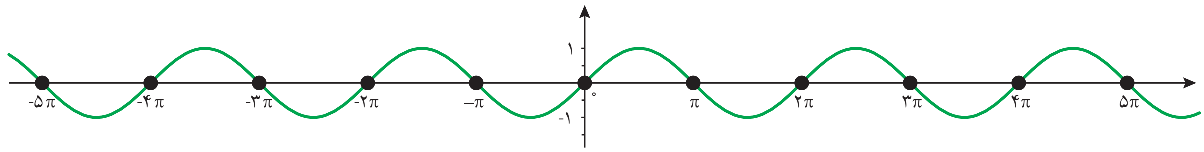




درس ۲

معادلات مثلثاتی

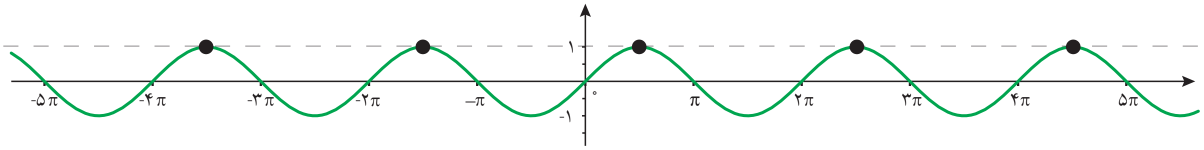
تابع مثلثاتی $y=\sin x$ را که نمودار آن در زیر رسم شده است را در نظر بگیرید.



همان‌طور که در نمودار پیداست، ریشه‌های این تابع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x=۰$ می‌باشد. به عبارت دیگر جواب‌های این معادله که به‌صورت :

$x=\dots,-۳\pi,-۲\pi,-\pi,۰,\pi,۲\pi,۳\pi,\dots$

می‌باشند محل تقاطع تابع ثابت $y=۰$ (یعنی محورها x) و تابع $y=\sin x$ است. این جواب‌ها را می‌توان به صورت کلی $x=k\pi$ که k یک عدد صحیح است نمایش داد.
به‌طور مشابه جواب های معادله $\sin x=۱$ مقادیری از x هستند که سینوس آنها برابر ۱ می‌شود. این مقادیر محل تقاطع $y=۱$ و $y=\sin x$ می‌باشند که در نمودار زیر رسم شده‌اند.



جواب‌های معادله فوق به‌صورت

$$x=\cdots,\frac{\pi}{۲}-۴\pi,\frac{\pi}{۲}-۲\pi,۰,\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}+۲\pi,\dots$$

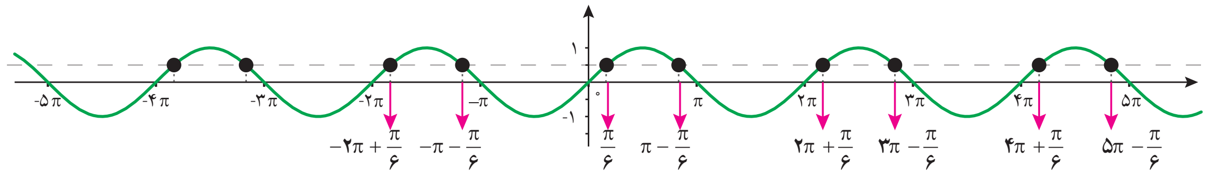
می‌باشند که به‌صورت کلی $x=\frac{\pi}{۲}+۲k\pi$ که k یک عدد صحیح است قابل نمایش هستند.

اکنون معادله $\sin x = \frac{۱}{۲}$ را در نظر بگیرید. انجام مراحل زیر به شما کمک می‌کند تا جواب‌های این معادله را بیابید.

فعالیت

۱ با آزمون و خطا و یادآوری نسبت‌های مثلثاتی زوایایی که قبلاً فراگرفته‌اید چند زاویه که سینوس آنها برابر $\frac{۱}{۲}$ است را حدس بزنید و با جایگذاری در معادله $\sin x = \frac{۱}{۲}$ درستی حدس خود را بررسی کنید.

۲ خط $y = \frac{۱}{۲}$ و نمودار $y=\sin x$ را در زیر رسم کرده‌ایم. مقادیری که حدس زده‌اید را روی نمودار پیدا کنید. این مقادیر متناظر با چه نقاطی از شکل زیر می‌باشند؟

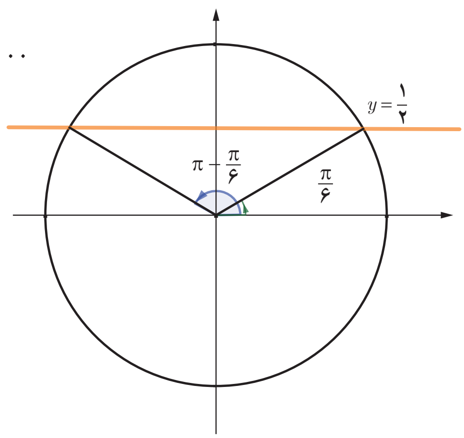


۳ طول نقاط تقاطع دو نمودار $y = \frac{۱}{۲}$ و $y=\sin x$ را که در شکل فوق مشخص شده‌اند، در معادله $\sin x = \frac{۱}{۲}$ جایگذاری کنید. آیا در معادله صدق می‌کنند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

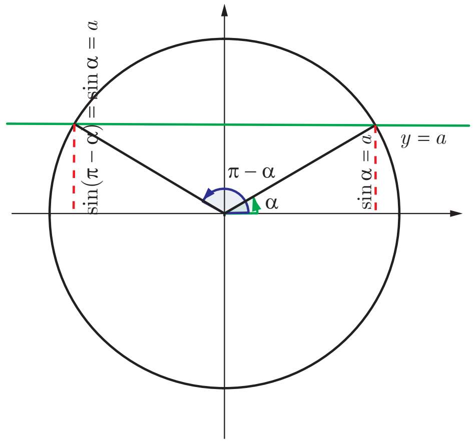
۳ در دایره مثلثاتی زیر خط $y = \frac{۱}{۲}$ و زوایای $\frac{\pi}{۶}$ و $\pi - \frac{\pi}{۶}$ که سینوس آنها برابر $\frac{۱}{۲}$ است رسم شده‌اند. کدام دسته از زوایای مشخص شده بر روی نمودار سؤال قبل هم انتها با زاویه $\frac{\pi}{۶}$ و کدام دسته هم انتها با زاویه $\pi - \frac{\pi}{۶}$ هستند؟ آنها را در جاهای خالی زیر مرتب کنید. آیا می‌توانید دو دسته زیر را از دو طرف ادامه دهید؟

هم انتها با $\frac{\pi}{۶}$: ...... , ... , $-۲\pi + \frac{\pi}{۶}$, $\frac{\pi}{۶}$, ... , $۲\pi + \frac{\pi}{۶}$, ...

هم انتها با $\pi - \frac{\pi}{۶}$: ...... , ... , $-\pi - \frac{\pi}{۶}$, ... , $۳\pi - \frac{\pi}{۶}$, ...



همواره برای عدد حقیقی $-۱\leq a\leq ۱$ که $\sin x=a$ زاویه‌ای چون α وجود دارد که برای آن داریم $\sin\alpha=a$. بنابراین معادله $\sin x=a$ به‌صورت $\sin x=\sin\alpha$ بازنویسی می‌شود. اکنون برای یافتن جواب‌های معادله $\sin x=\sin\alpha$ باید رابطه بین کمان‌های x و α را بیابیم.



با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو رابطه بین کمان معلوم α و کمان‌های مجهول x به‌طوری که $\sin x=\sin\alpha$ در دوران‌های مختلف به‌صورت زیر است :

$\sin x=\sin\alpha \Rightarrow x=۲k\pi+\alpha \quad x=(۲k+۱)\pi-\alpha$

جواب‌های کلی معادله $\sin x=\sin\alpha$ به‌صورت $x=۲k\pi+\alpha$ و $x=(۲k+۱)\pi-\alpha$ می‌باشد که $k\in\mathbb{Z}$.

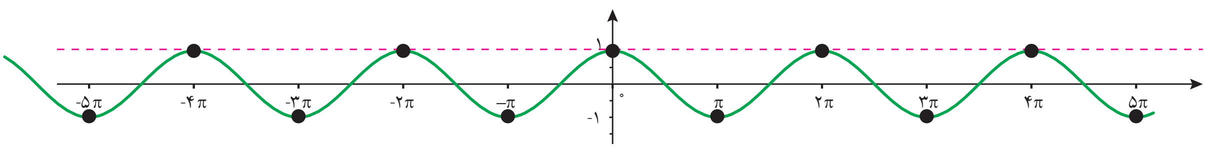
کار در کلاس

۱ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $۲\sin x-۱=۰$

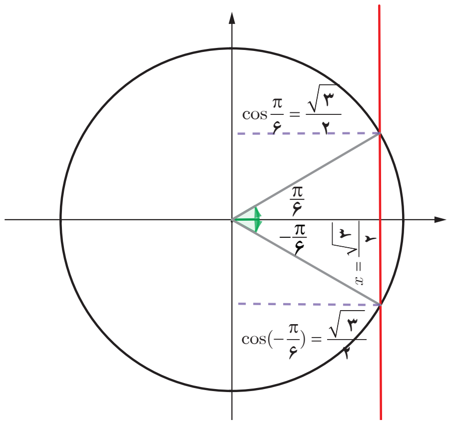
ب) $۴\sin x+\sqrt{۸}=۰$

۲ نمودار تابع $y=\cos x$ و خط $y=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ در زیر رسم شده‌اند. مشابه فعالیت قبل به سؤالات زیر پاسخ دهید تا جواب‌های معادله $\cos t=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ را بیابید.



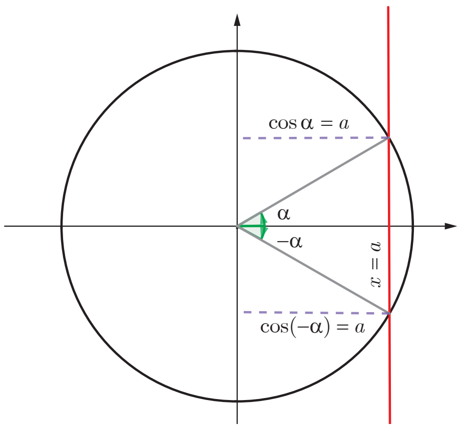
الف) برخی از جواب‌های معادله $\cos t = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ را با توجه به نقاط تقاطع دو نمودار پیدا کنید.

ب) با استفاده از دایره مثلثاتی روبه‌رو و محل تقاطع خط $x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ با دایره مثلثاتی جواب‌های معادله فوق را به‌دست آورید.



برای هر عدد حقیقی $-۱ \leq a \leq ۱$ معادله $\cos x = a$ برقرار است زاویه‌ای چون α وجود دارد که $\cos\alpha = a$. بنابراین برای حل معادله فوق کافی است ابتدا آن را به‌صورت $\cos x = \cos\alpha$ نوشته و سپس رابطه بین کمان‌های x و α را با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو به‌صورت زیر به دست آوریم.

$$\cos x = \cos\alpha \Rightarrow x = ۲k\pi + \alpha \quad , \quad x = ۲k\pi - \alpha$$



جواب‌های کلی معادله $\cos x = \cos\alpha$ به‌صورت $x = ۲k\pi \pm \alpha$ می‌باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

مثال : جواب‌های معادله $\cos x = -\frac{۱}{۲}$ را به‌دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $[-۳\pi, \pi]$ می‌باشند؟

می‌دانیم $\cos\frac{\pi}{۳} = -۱$ پس معادله به‌صورت $\cos x = \cos\frac{\pi}{۳}$ می‌باشد. بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند.

$$x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

اکنون با جایگذاری مقادیر صحیح به جای k در عبارت فوق داریم :

k	x	عضویت در بازه
$k=۰$	$x=۲\times۰\times\pi+\frac{\pi}{۳}=\frac{\pi}{۳}$	$-\frac{\pi}{۳}\in[-۳\pi,\pi]$
	$x=۲\times۰\times\pi-\frac{\pi}{۳}=-\frac{\pi}{۳}$	$-\frac{\pi}{۳}\in[-۳\pi,\pi]$
$k=۱$	$x=۲\times۱\times\pi+\frac{\pi}{۳}=۲\pi+\frac{\pi}{۳}$	$۲\pi+\frac{\pi}{۳}\notin[-۳\pi,\pi]$
	$x=۲\times۱\times\pi-\frac{\pi}{۳}=۲\pi-\frac{\pi}{۳}$	$۲\pi-\frac{\pi}{۳}\notin[-۳\pi,\pi]$
$k=-۱$	$x=۲\times-۱\times\pi+\frac{\pi}{۳}=-۲\pi+\frac{\pi}{۳}$	$-۲\pi+\frac{\pi}{۳}\in[-۳\pi,\pi]$
	$x=۲\times-۱\times\pi-\frac{\pi}{۳}=-۲\pi-\frac{\pi}{۳}$	$-۲\pi-\frac{\pi}{۳}\in[-۳\pi,\pi]$
$k=۲$	$x=۲\times۲\times\pi+\frac{\pi}{۳}=۴\pi+\frac{\pi}{۳}$	$۴\pi+\frac{\pi}{۳}\notin[-۳\pi,\pi]$
	$x=۲\times۲\times\pi-\frac{\pi}{۳}=۴\pi-\frac{\pi}{۳}$	$۴\pi-\frac{\pi}{۳}\notin[-۳\pi,\pi]$
$k=-۲$	$x=۲\times-۲\times\pi+\frac{\pi}{۳}=-۴\pi+\frac{\pi}{۳}$	$-۴\pi+\frac{\pi}{۳}\notin[-۳\pi,\pi]$
	$x=۲\times-۲\times\pi+\frac{\pi}{۳}=-۴\pi-\frac{\pi}{۳}$	$-۴\pi-\frac{\pi}{۳}\notin[-۳\pi,\pi]$

می‌توان نشان داد که جواب‌هایی از معادله فوق که به ازای مقادیر دیگری از k تولید می‌شوند خارج بازه داده شده می‌باشند. بنابراین نتیجه می‌شود که جواب‌های $x=-۲\pi-\frac{\pi}{۳},-۲\pi+\frac{\pi}{۳},-\frac{\pi}{۳},\frac{\pi}{۳}$ از معادله فوق در بازه داده شده می‌باشند.

مثال : معادله $\sin ۲x=\sin ۳x$ را حل کنید.

می‌دانیم که جواب‌های این معادله به شکل زیر هستند :

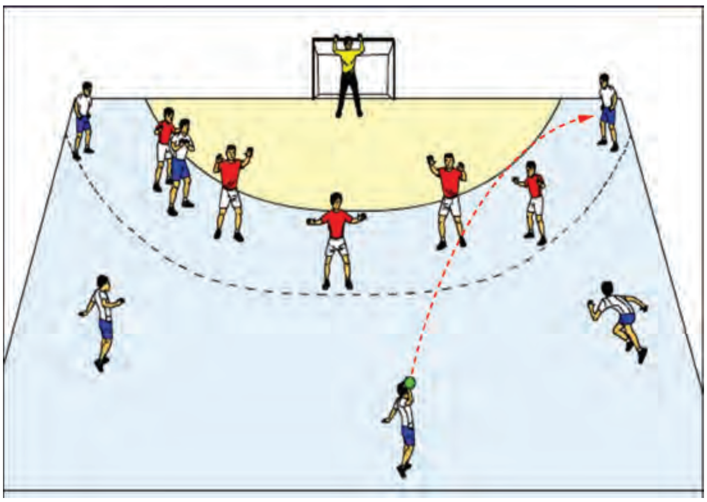
$$\begin{cases} ۲x=۲k\pi+۳x\Rightarrow x=۲k \\ ۲x=(۲k\pi+۱)\pi-۳x\Rightarrow x=\frac{۲k+۱}{۵}\pi \end{cases}$$

مثال : معادله $۲\sin ۳x - \sqrt{۲} = ۰$ را حل کنید.

$$۲\sin ۳x - \sqrt{۲} = ۰$$
$$۲\sin ۳x = \sqrt{۲}$$
$$\sin ۳x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$
$$\sin ۳x = \sin\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۱۲} \\ ۳x = (۲k+۱)\pi - \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{(۲k+۱)}{۳}\pi - \frac{\pi}{۱۲} \end{cases}$$

مثال : یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت km/h ۱۲برای هم‌تیمی خود که در ۲۰ متری او قرار گرفته پرتاب می‌کند (به‌شکل نگاه کنید). اگر رابطه بین سرعت توپ v (بر حسب کیلومتر بر ساعت)، مسافت طی شده افقی d (بر حسب متر) و زاویه پرتاب θ به‌صورت زیر باشد، آنگاه زاویه پرتاب توپ چقدر بوده است؟

$$d = \frac{v^۲}{۳۲}\sin ۲\theta$$



مثال : جواب‌های معادله $\sin x\cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$ را به‌دست آورید.

$$۲\sin x\cos x = ۲\frac{\sqrt{۳}}{۴} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$
$$\sin ۲x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$
$$\sin ۲x = \sin\frac{\pi}{۳} \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ ۲x = (۲k+۱)\pi - \frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = \frac{(۲k+۱)}{۲} - \frac{\pi}{۶} \end{cases}$$

مثال : معادله $\sin x+\cos x=۱$ را در بازه $۰\le x\le ۲\pi$ حل کنید.

$\sin x+\cos x=۱$

$\sin x=۱-\cos x$

$\sin^۲ x=(۱-\cos x)^۲$ طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.

$\sin^۲ x=۱-۲\cos x+\cos^۲ x$ استفاده از رابطه $\sin^۲=۱-\cos^۲ x$

$۱-\cos^۲ x=۱-۲\cos x+\cos^۲ x$

$۲\cos^۲ x-۲\cos x=۰$

$۲\cos x(\cos x-۱)=۰ \Rightarrow ۲\cos x=۰$ یا $\cos x-۱=۰$

اکنون جواب‌های معادله‌های به‌دست آمده را در بازه $۰\le x\le ۲\pi$ می‌یابیم :

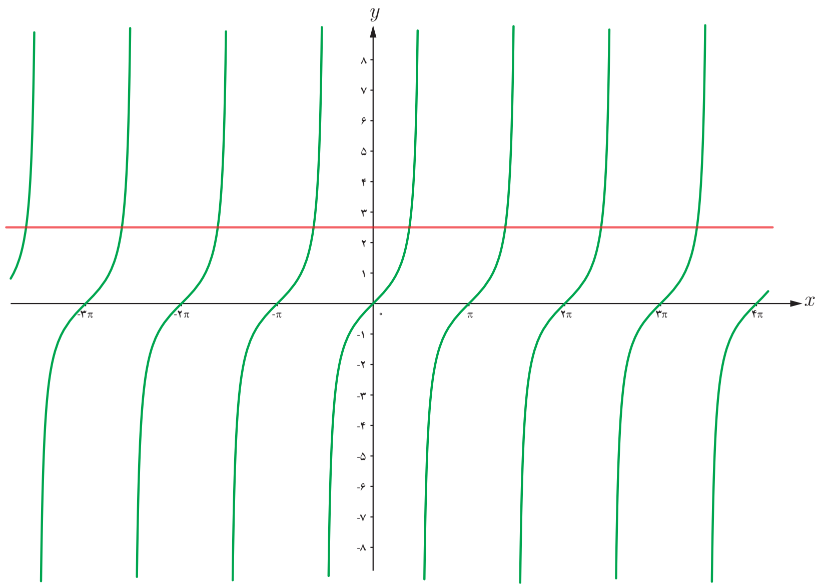
$$۲\cos x=۰\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}$$
$$\cos x-۱=۰ \Rightarrow x=۰$$

از آنجا که در گام سوم از به توان رساندن استفاده کرده‌ایم باید جواب‌های به‌دست آمده فوق را در معادله گذاشته و درستی آنها را تحقیق کنیم (چرا؟). پس از بررسی معلوم می‌شود که $x=\frac{۳\pi}{۲}$ جواب معادله داده شده نیست و بنابراین غیرقابل قبول است اما $x=۰,\frac{\pi}{۲}$ مقادیر به‌دست آمده جواب معادله در بازه داده شده هستند.

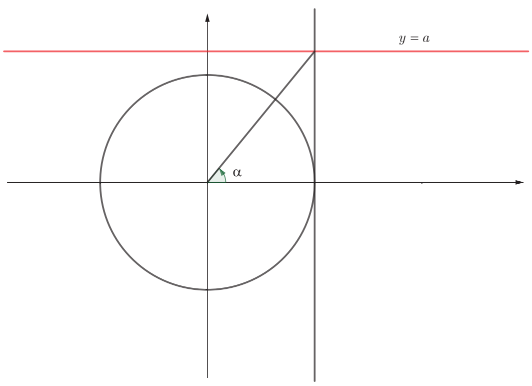
مثال : معادله $\cos(۲\cos x-۹)=۵$ را حل کنید.
ابتدا این معادله را به‌صورت $۲\cos^۲ x-۹\cos x-۵=۰$ می‌نویسیم. با تغییر متغیر $t=\cos x$ می‌توان معادله فوق را به معادله درجه دوم $۲t^۲-۹t-۵=۰$ نوشت. جواب‌های این معادله به‌صورت $t=-\frac{۱}{۲}$ و $t=۵$ به‌دست می‌آیند. بنابراین جواب‌های معادله مثلثاتی بالا از حل دو معادله ساده $\cos x=۵$ و $\cos x=\frac{۱}{۲}$ به‌دست می‌آیند. از آنجا که $\cos x=۵$ جواب ندارد (چرا؟) فقط جواب‌های معادله $\cos x=-\frac{۱}{۲}$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\cos x=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x=\cos\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x-۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$$

در شکل زیر تابع $y=\tan x$ و نیز تابع $y=a$ که a یک عدد حقیقی است رسم شده‌اند. از روی نمودار این دو تابع می‌توان مشاهده کرد که جواب‌های معادله $\tan x=a$ همان طول نقاط تقاطع دو نمودار است. در واقع همواره برای عدد حقیقی a که $\tan x=a$ زاویه‌ای چون α وجود دارد که برای آن داریم $\tan\alpha=a$. بنابراین معادله $\tan x=a$ به‌صورت $\tan x=\tan\alpha$ بازنویسی می‌شود. اکنون برای یافتن جواب‌های معادله $\tan x=\tan\alpha$ باید رابطه بین کمان‌های x و a را بیابیم.



از دایره مثلثاتی و محور تانژانت در شکل مقابل می‌توان دریافت که رابطه بین کمان‌های x و a به‌صورت $x=k\pi+\alpha$ که k یک عددی صحیح است می‌باشد.



جواب‌های کلی معادله $\tan x=\tan\alpha$ به‌صورت $x=k\pi+\alpha$ می‌باشد که k یک عددی صحیح است.

مثال : معادله $\tan x=\tan 5x$ را حل کنید.

حل : جواب‌های این معادله از $5x=k\pi+x$ رابطه بین کمان‌های دو تابع به‌دست می‌آیند. بنابراین $x=k\frac{\pi}{4}$. البته باید توجه کرد فقط مقادیری از k قابل قبول هستند که به ازای آنها طرفین معادله فوق تعریف شده باشند. بنابراین با توجه به دامنه تابع‌های فوق، فقط مقادیری از $x=k\frac{\pi}{4}$ قابل قبول هستند که به ازای آنها کمان‌های x و $5x$ مضرب فردی از $\frac{\pi}{2}$ نباشند.

از روابط مجموع و تفاضل زوایا برای نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس می‌توان روابط مجموع و تفاضل زوایا را برای تانژانت به‌صورت زیر به‌دست آورد.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

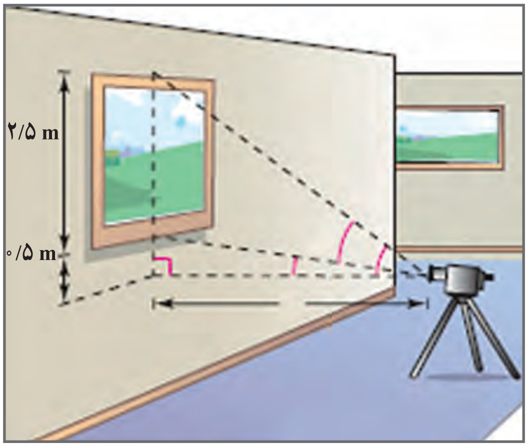
$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\cancel{\cos\beta}}+\dfrac{\cancel{\cos\alpha}\sin\beta}{\cancel{\cos\alpha}\cos\beta}}{\dfrac{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}$$

همچنین با تغییر β به β− در رابطه فوق رابطه تفاضل زوایا به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}$$

مثال : نشان دهید در شکل زیر رابطه بین زاویه دید دوربین (β) با فاصله افقی آن با تابلو نقاشی به‌صورت زیر است.

$$\tan\beta=\frac{۲/۵\,x}{x^۲+\frac{۳}{۲}}$$



سپس زاویه دید را در حالتی که فاصله افقی برابر یک متر است به‌دست آورید.

حل : با توجه به شکل برای مثلث قائم‌الزاویه پایین شکل داریم :

$$\tan\alpha=\frac{۰/۵}{x}$$

همچنین برای مثلث بزرگ که یک زاویه آن θ است داریم :

$$\tan\theta=\frac{۳}{x}$$

اکنون با استفاده از رابطه تفاضل زوایا برای تانژانت به‌دست می‌آید :

$$\tan\beta=\tan(\theta-\alpha)=\frac{\tan\theta-\tan\alpha}{1+\tan\theta\tan\alpha}=\frac{\frac{3}{x}-\frac{0/5}{x}}{1+\frac{3}{x}\times\frac{0/5}{x}}=\frac{\frac{2/5}{x}}{\frac{x^2+\frac{3}{2}}{x^2}}=\frac{2/5x}{x^2+\frac{3}{2}}$$

وقتی فاصله افقی برابر یک متر آنگاه داریم :

$$x=1\rightarrow\tan\beta=\frac{2/5\times1}{1^2+\frac{3}{2}}=\frac{2/5}{2/5}=1$$

از طرفی می‌دانیم که $\tan\frac{\pi}{4}=1$ پس جواب‌های معادله $\tan\beta=1$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند :

$$\beta=k\pi+\frac{\pi}{4}$$

لیکن با توجه به شکل تنها جواب منطقی در حالت $k=0$ که مقدار $\beta=\frac{\pi}{4}$ را به‌دست می‌دهد قابل قبول می‌باشد.

تمرین

https://t.me/Nader_belalzadeh

۱ فرض کنید $\cos\alpha=\frac{5}{13}$ و α زاویه‌ای تند باشد، حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\cos2\alpha$ ب) $\sin2\alpha$

۲ نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $22/5^\circ$ به‌دست آورید.

۳ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin\frac{\pi}{2}=\sin3x$ ب) $\cos2x-\cos x+1=0$

پ) $\cos x=\cos2x$ ت) $\cos2x-\sin x+1=1$

ث) $2\sin^2x+\sin x-1=0$ ج) $\sin x-\cos2x=0$

۴ مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

حدهای نامتناهی ــ حد در بی‌نهایت

فصل ۳

درس ۱

حدهای نامتناهی

فعالیت

هزینه پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی از رودخانه‌ای به‌وسیله تابعی با ضابطه $f(x)=\frac{۲۵۵x}{۱۰۰-x}$ محاسبه می‌شود که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک‌سازی برحسب میلیون تومان است مثلاً هزینه پاک‌سازی ۲۰ درصد از آلودگی‌های این رودخانه $f(۲۰)=۶۳/۷۵$ است و این بدین معنی است که ۶۳/۷۵ میلیون تومان برای این کار لازم است.

الف) جدول زیر را با توجه به تابع f، کامل کنید. اعداد سطر دوم جدول چه چیزی را نشان می‌دهد؟

x	۲۰	۴۰	۵۰	۸۰	۹۰
$f(x)$	۶۳/۷۵				

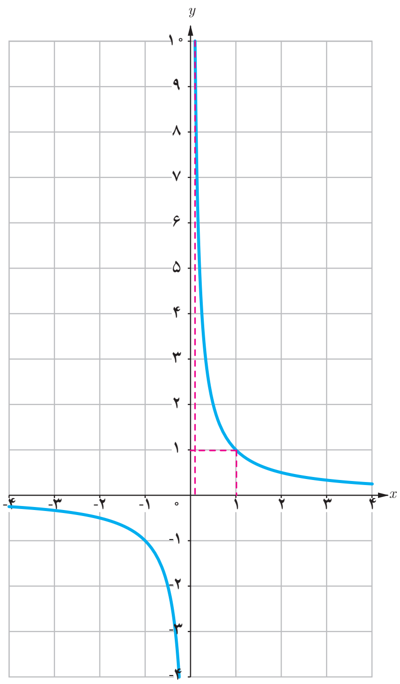
ب) اگر بخواهیم ۹۵ درصد از آلودگی‌های این رودخانه پاک‌سازی شود چقدر باید هزینه کنیم؟

پ) چرا هیچ‌گاه صددرصد از آلودگی‌های این رودخانه پاک‌سازی نمی‌شود؟

همان‌طور که ملاحظه شد با نزدیک شدن x به عدد ۱۰۰ مقدار $f(x)$ افزایش می‌یابد و هرگاه x به قدر کافی به عدد ۱۰۰ نزدیک شود مقدار $f(x)$ از هر عدد مثبت از پیش داده شده‌ای بزرگ‌تر خواهد شد.

فعالیت

در سال قبل با نمودار تابع گویای $f(x)=\frac{۱}{x}$ آشنا شدید. می‌خواهیم رفتار این تابع را در نزدیکی نقطه $x=۰$ بررسی کنیم.



۱ جدول زیر رفتار تابع را به ازای برخی از مقادیر x نشان می‌دهد آن را تکمیل کنید.

x	۰	۰/۰۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۱
$f(x)$	تعریف نشده	...	۱۰۰۰	...	۱۰	...

۲ اگر بخواهیم $f(x)$ از یک میلیون بزرگ‌تر شود مقدار x از چه عددی باید کوچک‌تر شود؟

۳ در حالتی که $x \to 0^+$ آیا مقادیر تابع به عددی خاص نزدیک می‌شوند؟ چرا؟

با توجه به این فعالیت مشاهده می‌شود که وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود (از سمت راست)، $f(x)$ بدون هیچ محدودیتی افزایش می‌یابد به بیان دیگر می‌توان $f(x)$ را از هر عدد مثبت مفروضی بزرگ‌تر کرد به شرطی که x را به اندازهٔ کافی با مقادیر بزرگ‌تر از صفر، به صفر نزدیک کنیم در این صورت می‌نویسیم : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$.

این نمادگذاری بدین معنی نیست که ∞ را عدد به حساب آورده‌ایم. همچنین بدین معنی نیست که حد مورد نظر وجود دارد.

کار در کلاس

برای تابع $f(x)=\frac{1}{x}$

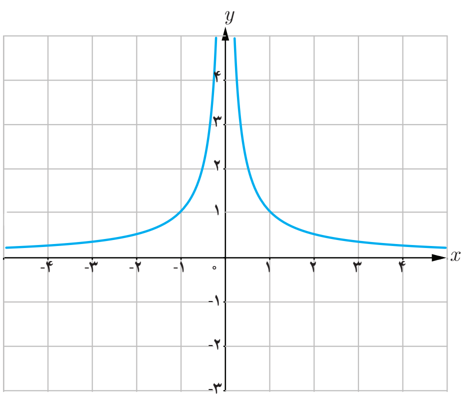
الف) جدول روبه‌رو را کامل کنید :

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{5}$	−۰/۱	−۰/۰۰۱	−۰/۰۰۰۱	−۰/۰۰۰۰۱
$f(x)$	−۱				−۱۰۰۰		

ب) اگر بخواهیم $f(x)$ از -10^6 کوچک‌تر شود مقدار x باید به چه عددی نزدیک شود؟

پ) وقتی x از سمت چپ به صفر نزدیک شود $f(x)$ چه تغییری می‌کند؟

ت) در مورد $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}$ چه می‌توان گفت؟



مثال : نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{|x|}$ در شکل روبه‌رو رسم شده است می‌خواهیم رفتار تابع را در نقطه $x=0$ بررسی کنیم به جدول زیر توجه کنید :

x	±۱	±۰/۵	±۰/۱	±۰/۰۱	±۰/۰۰۱	±۰/۰۰۰۱
$f(x)$	۱	۲	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰

مشاهده می‌شود با نزدیک کردن x به اندازه کافی به صفر، مقدارهای $f(x)$ را به دلخواه بزرگ کرد بنابراین $f(x)$ به هیچ عددی میل نمی‌کند و در نتیجه $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{|x|}$ وجود ندارد. در اینجا می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{|x|}=+\infty$.

تعریف :

فرض کنید تابع f در هر دو طرف a (به جز احتمالاً خود a) تعریف شده باشد در این صورت $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ یعنی اینکه می‌توانیم $f(x)$ را به دلخواه (هر قدر بخواهیم) از هر عدد مثبت بزرگ کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

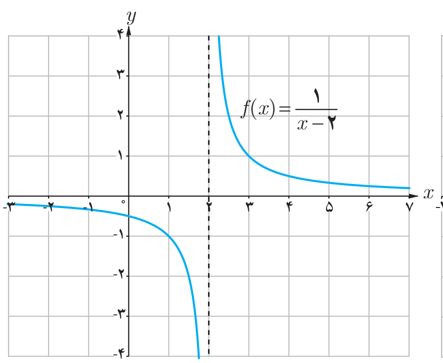
تعریف مشابهی از حدّ در مورد تابع‌هایی که وقتی x به a نزدیک می‌شود و خیلی کوچک منفی می‌شود در زیر وجود دارد.

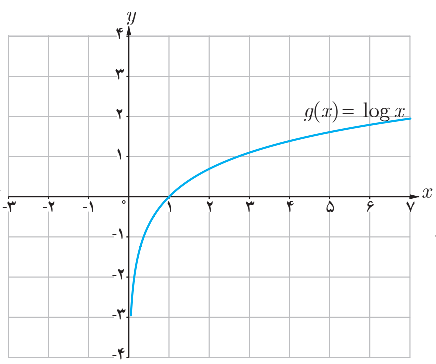
تعریف :

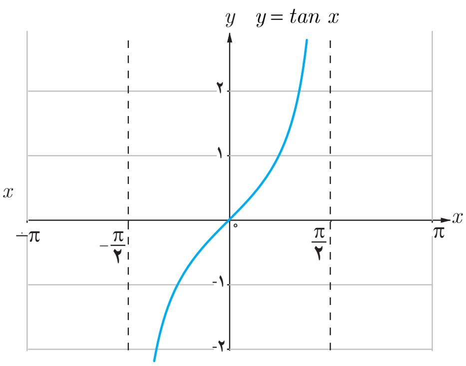
فرض کنید تابع f در هر دو طرف به جز احتمالاً در خود a تعریف شده باشد در این صورت $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ یعنی اینکه می‌توانیم مقدارهای $f(x)$ را به دلخواه از هر عدد منفی کوچک‌تر کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

کار در کلاس

با توجه به نمودار توابع زیر حدهای نامتناهی را مشخص کنید.







$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\cdots$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\cdots$

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\cdots$

$\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} t(x)=\cdots$

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} t(x)=\cdots$

قضایای حدهای بی‌نهایت

قضایای زیر در مورد حدهای بی‌نهایت برقرارند که در این کتاب به اثبات آنها نمی‌پردازیم.

قضیهٔ ۱ : اگر n یک عدد طبیعی باشد؛ آن‌گاه :

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{x^n}=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to ۰^-}\frac{۱}{x^n}=\begin{cases}+\infty & :\text{زوج } n\\ -\infty & :\text{فرد } n\end{cases}$$

مثال : با توجه به قضیه فوق می‌توان نوشت :

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{x^۴}=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to ۰^-}\frac{۱}{x^۳}=-\infty$$

قضیهٔ ۲ : الف) اگر $\lim_{x\to a^+}f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to a^-}f(x)=+\infty$ آن‌گاه $\lim_{x\to a}f(x)=+\infty$ و بالعکس.

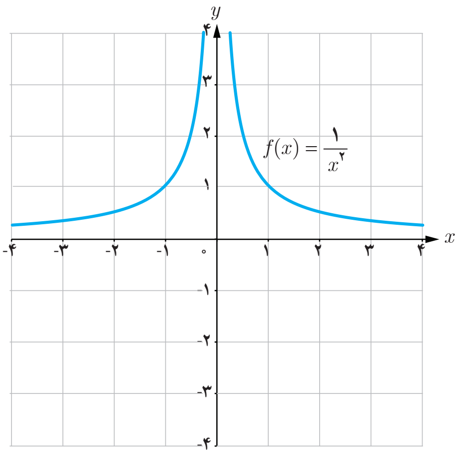
ب) اگر $\lim_{x\to a^+}f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to a^-}f(x)=-\infty$ آن‌گاه $\lim_{x\to a}f(x)=-\infty$ و بالعکس.

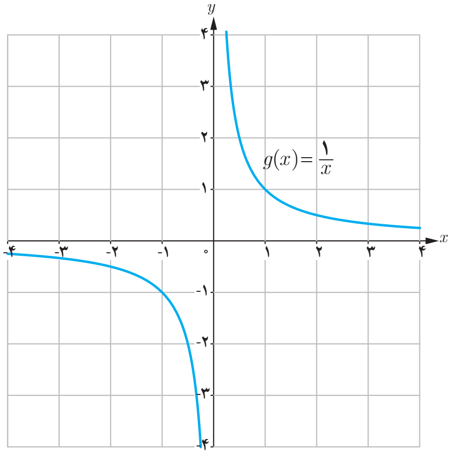
کار در کلاس

با استفاده از نمودار توابع داده شده و همچنین قضایای بالا حاصل حدود زیر را به‌دست آورید.

الف) $\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{x^۲}$

ب) $\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{x}=$





قضیه ۳ : اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\neq ۰$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=۰$ آن‌گاه :

الف) اگر $L>۰$ و $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

ب) اگر $L<۰$ و $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

پ) اگر $L>۰$ و $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

ت) اگر $L<۰$ و $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

تذکر : قضیه فوق در حالتی که $x\to a^+$ یا $x\to a^-$ نیز برقرار است.

مثال : $\lim\limits_{x\to ۲^-}\dfrac{x+۱}{۴-x^۲}$ را محاسبه کنید.

حل : وقتی $x\to ۲^-$ مخرج کسر یعنی $۴-x^۲$ با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند زیرا

$x<۲ \Rightarrow x^۲<۴ \Rightarrow ۴-x^۲>۰$

از طرفی $\lim\limits_{x\to ۲^-} x+۱=۳$ طبق بند (الف) قضیه فوق $\lim\limits_{x\to ۲^-}\dfrac{x+۱}{۴-x^۲}=+\infty$

مثال : $\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{x-۱}{\sin x}$ را محاسبه کنید.

حل : وقتی $x\to ۰^+$ حد صورت کسر برابر -۱ و حد مخرج کسر برابر صفر است و از آنجا که x در ربع اوّل دایره مثلثاتی است مقدار $\sin x$ عددی مثبت است در نتیجه طبق بند (ب) قضیه فوق $\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{x-۱}{\sin x}=-\infty$

کار در کلاس

حدود زیر را محاسبه کنید.

۱ $\lim\limits_{x\to -۲^+}\dfrac{۱-x}{x+۲}$

۲ $\lim\limits_{x\to ۲^-}\dfrac{[x]-۲}{x-۲}$

قضیه ۴ : اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ آنگاه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$

تذکر : قضیه فوق در حالتی که $x\to a^+$ یا $x\to a^-$ نیز برقرار است.

مثال : $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x+1}{\tan x}$ را محاسبه کنید.

روش اوّل : (استفاده از قضیه ۴) داریم $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan x=+\infty$ و $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=-\infty$ از طرفی $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} x+1=\frac{\pi}{2}+1$ طبق قضیه فوق $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x+1}{\tan x}=0$

روش دوم :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x+1}{\tan x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x+1}{\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(x+1)\cos x}{\sin x}=\frac{(\frac{\pi}{2}+1)\times 0}{1}=0$$

اعمال روی حدود نامتناهی

فعالیت

۱ توابع $f(x)=\frac{1}{x^2}$ و $g(x)=x+1$ را در نظر بگیرید.

الف) $\lim_{x\to 0} f(x)$ و $\lim_{x\to 0} g(x)$ را به‌دست آورید.

ب) تابع $f+g$ را به‌صورت یک تابع گویا بنویسید و $\lim_{x\to 0}\left((f+g)(x)\right)$ را محاسبه کنید.

پ) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۲ تابع $f\times g$ را به‌صورت یک تابع گویا بنویسید و $\lim_{x\to 0} f(x)\times g(x)$ را محاسبه کنید و ارتباط آن را با $\lim_{x\to 0} f(x)$ و $\lim_{x\to 0} g(x)$ بیان کنید.

همان‌طور در فعالیت فوق مشاهده کردید به‌طور کلی قضیه زیر را می‌توان بیان کرد.

قضیه ۵ : اگر $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to a} g(x)=L$ آن‌گاه؛

الف) $\lim_{x\to a} f(x)+g(x)=+\infty$

ب) اگر $L>0$ آن‌گاه $\lim_{x\to a} f(x)\times g(x)=+\infty$

اگر $L<0$ آن‌گاه $\lim_{x\to a} f(x)\times g(x)=-\infty$

تذکر : قضیه برای حالتی که $x\to a^+$ یا $x\to a^-$ نیز برقرار است.

کار در کلاس

۱

قضیه ۵، در حالتی که $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ به طریق مشابه برقرار است آن را بیان کنید.

۲ در هر یک از موارد زیر بررسی کنید که آیا از قضیه ۵ می‌توان برای محاسبه تابع‌های $f+g$ و یا $f\times g$ استفاده کرد. سپس حدود خواسته شده را محاسبه کنید.

الف) $f(x)=\frac{۱}{x^۲}\ ,\ g(x)=\frac{۱}{x}$

$\lim\limits_{x\to ۰^-}(f+g)(x)=$

ب) $f(x)=\frac{-۱}{x}\ ,\ g(x)=\frac{۱}{x}$

$\lim\limits_{x\to ۰^-}(f+g)(x)=$

پ) $f(x)=x^۳$ و $g(x)=\frac{۱}{x^۲}$

$\lim\limits_{x\to ۰}(f\times g)(x)=$

تذکر : قضایا و مطالب مربوط به حدهای نامتناهی با قضایای حالت حدهای متناهی با هم تفاوت دارند زیرا نمادهای $+\infty$ و $-\infty$ را داریم که اعداد حقیقی نیستند بنابراین $+\infty$ و $-\infty$ قرینه هم نیستند بنابراین در محاسبه حدود نامتناهی با ساده کردن عبارات، توابع را به‌گونه‌ای می‌نویسیم که بتوان از قضایای ذکر شده استفاده کرد.

مثال : به حدود زیر توجه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰^+}(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x})$ ب) $\lim\limits_{x\to ۰^+}(\frac{۲}{x}-\frac{۱}{x})$ پ) $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^۲}$

در محاسبه حدود هر سه قسمت به $\infty-\infty$ می‌رسیم از آنجا که ∞ یک عدد نیست نمی‌توان گفت حاصل حدود مذکور برابر صفر است. برای محاسبه حدود فوق می‌توان نوشت :

الف) $\lim\limits_{x\to ۰^+}(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x})=\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{۱-۱}{x}=\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{۰}{x}=۰$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰^+}(\frac{۲}{x}-\frac{۱}{x})=\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{۲-۱}{x}=\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{۱}{x}=+\infty$

پ) $\lim\limits_{x\to ۰^+}(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^۲})=\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{x-۱}{x^۲}=-\infty$

مثال : $\lim\limits_{x\to -۴^-}\left(\frac{۲}{x^۲+۳x-۴}-\frac{۳}{x+۴}\right)$ را محاسبه کنید.

حل : اگرچه به‌صورت مستقیم عمل کنیم به حالت $\infty+\infty-$ می‌رسیم که نمی‌توان از قضایا استفاده نمود. امّا اگر عبارت جلوی حد را ساده کنیم و به‌صورت یک کسر بنویسیم. سپس حدگیری را انجام دهیم داریم :

$$\lim_{x\to -۴^-}\frac{۲(x-۱)-۳}{x^۲+۳x-۴}=\lim_{x\to -۴^-}\frac{۲x-۵}{x^۲+۳x-۴}\quad (*)$$

حد صورت برابر ۱۳− است با توجه به جدول تعیین علامت برای مخرج کسر داریم :

x		-۴		۱	
$x^۲+۳x-۴$	+	۰	−	۰	+

وقتی $x\to -۴^-$ حد مخرج کسر فوق با مقادیر مثبت به صفر نزدیک می‌شود و بنا به قضیه ۳ حد $(*)$ برابر $\infty-$ خواهد بود.

کار در کلاس

حدود زیر را محاسبه کنید.

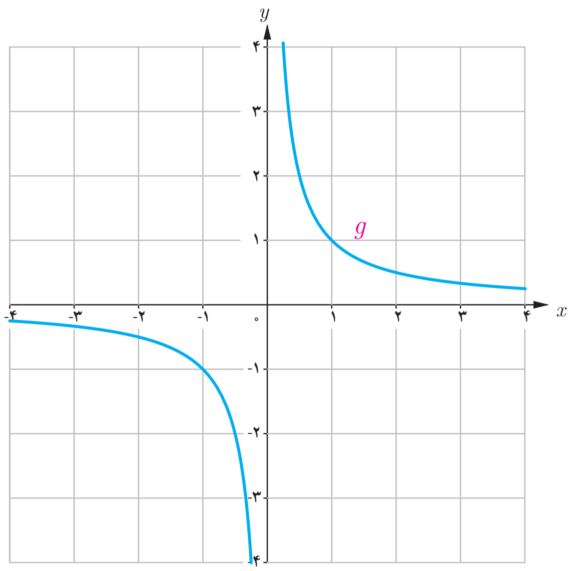
۱ $\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x+۱}$

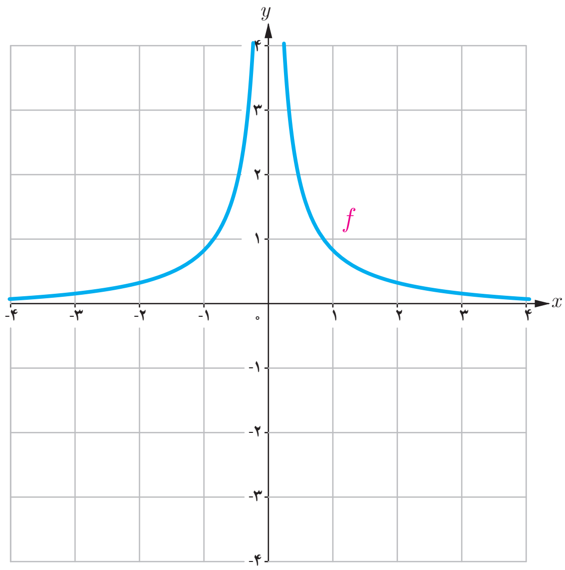
۲ $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{۱}{x^۲}+\frac{۱}{x}$

۳ $\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{x-۱}{x+۱}-\frac{x+۱}{x-۱}$

مجانب قائم

به نمودارهای هر یک از توابع $f(x)=\frac{۱}{x^{۲}}$ و $g(x)=\frac{۱}{x}$ در اطراف نقطه صفر توجه کنید.





این دو تابع در بازه‌های $(۰\,,+\infty)$ و $(-\infty\,,۰)$ پیوسته‌اند ولی در نقطه $x=۰$ تعریف نشده‌اند.

از طرفی $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to ۰^{+}} g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to ۰^{-}} g(x)=-\infty$

خط $x=۰$ را در هر دو منحنی، مجانب قائم نمودار می‌گویند.

تعریف :

خط $x=a$ را مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

$$\lim_{x\to a^{-}} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to a^{+}} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to a^{-}} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to a^{+}} f(x)=-\infty$$

مثال : مجانب‌های قائم تابع $f(x)=\frac{x^{۲}-۴x+۳}{x^{۲}-۲x-۳}$ را به‌دست آورید.

حل : از $x^{۲}-۲x-۳=۰$ نتیجه می‌شود $x=-۱$ یا $x=۳$ شرایط مجانب قائم را برای دو خط مذکور بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x\to -۱^{+}} f(x)=\lim \frac{x^{۲}-۴x+۳}{x^{۲}-۲x-۳}=-\infty$$

علاوه بر آن $\lim\limits_{x\to -۱^-} f(x)=+\infty$ در نتیجه خط $x=-۱$ مجانب قائم منحنی f است. از طرفی

$$\lim_{x\to ۳} f(x)=\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۴x+۳}{x^۲-۲x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(x-۱)}{(x-۳)(x+۱)}=\lim_{x\to ۳}\frac{x-۱}{x+۱}=\frac{۱}{۲}$$

خط $x=۳$ شرایط لازم برای مجانب قائم را نداشت لذا منحنی تابع f فقط یک مجانب قائم $x=-۱$ دارد.

کار در کلاس

مجانب‌های قائم تابع $f(x)=\dfrac{x^۲+x-۲}{x^۲-x-۶}$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

تمرین

۱ با استفاده از قضایای حدود نامتناهی ثابت کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sqrt{۳+x^۲}}{x^۲}=+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰}(\dfrac{۱}{x}-\dfrac{۱}{x^۲})=-\infty$

پ) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{۱}{(x-۲)^۴}=+\infty$

ت) $\lim\limits_{x\to -۲}\left|\dfrac{۵-x}{۲+x}\right|=+\infty$

۲ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۳^+}\dfrac{۲}{x-۳}-\dfrac{۳}{x^۲-۹}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳^-}\dfrac{x^۲+۲x-۱}{x^۲+x-۱۲}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{x+۱}{x^۲-۹}$

۳ نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $\mathbb{R}-\{-۱ \ \ ۱\}$ بوده و دارای دو مجانب قائم باشد.

۴ نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $[-۲ \ ,\ ۲]-\{۱\}$ بوده و دارای مجانب قائم باشد.

۵ مجانب‌های قائم توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\dfrac{۲x-۱}{۳-x}$

ب) $g(x)=\dfrac{x^۲+x}{x^۲-x}$

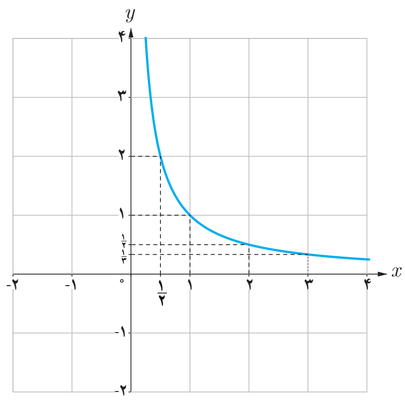
درس ۲

حد در بی‌نهایت

در درس قبل حدهای نامتناهی و مجانب‌های قائم یک منحنی را بررسی کردیم در آنجا x را به سمت عددی میل می‌دادیم و نتیجه این می‌شد که مقدارهای y به دلخواه بزرگ (مثبت) یا کوچک (منفی) می‌شدند.
در این درس x را به دلخواه بزرگ (مثبت) یا کوچک (منفی) در نظر می‌گیریم و تغییرات y را بررسی می‌کنیم که در رسم نمودارها برای بررسی رفتار انتهایی نمودار تابع بسیار مفید است.

فعالیت

نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را در بازه $(۰\,,+\infty)$ در نظر بگیرید.



۱ جدول زیر را کامل کنید.

x	۱	۲	۵	۱۰	۱۰۰	$۱۰^۳$	$۱۰^۵$	$۱۰^۶$
$f(x)$	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۵}$	...	...	...	...	...

۲ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ تا محور xها از $\frac{۱}{۳}$ کمتر شود x را باید از چه عددی بزرگ‌تر بگیریم؟

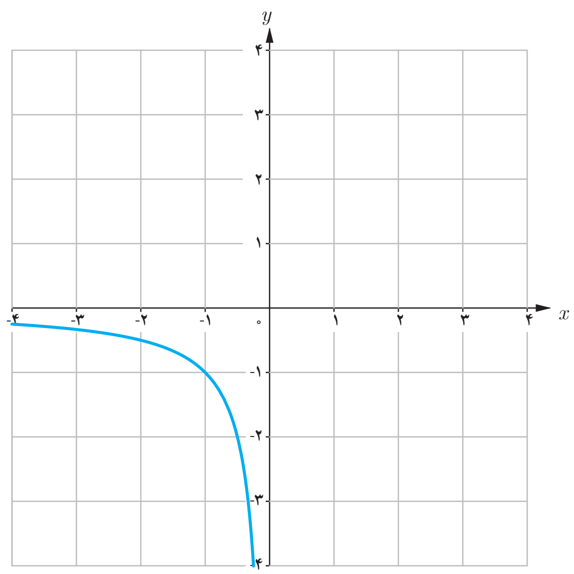
۳ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ از محور xها از $\frac{1}{10}$ کمتر شود x را باید از چه عددی بزرگ‌تر بگیریم؟

۴ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ از محور xها از $\frac{1}{100}$ کوچک‌تر شود x را باید از چه عددی بزرگ‌تر در نظر بگیریم؟

۵ آیا به هر میزان دلخواه فاصله $f(x)$ از محور xها را می‌توان کاهش داد؟

با توجه به نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ و جدول صفحه قبل می‌توان مشاهده کرد که مقدار $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه می‌توان به صفر نزدیک کرد به شرطی که x را به اندازه مناسب بزرگ انتخاب کنیم در این صورت می‌گوییم حد $f(x)$ وقتی $x \to +\infty$ برابر صفر است و می‌نویسیم. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

کار در کلاس



نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در بازه $(-\infty , 0)$ در نظر بگیرید.

۱ جدول زیر را کامل کنید.

x	-10^4	-10^3	-100	-10	-5	-2	-1
$f(x)$							

۲ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ از محور xها کمتر از $\frac{1}{10^5}$ شود، x از چه عددی کوچک‌تر در نظر گرفته شود؟

۳ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ از محور xها از $\frac{۱}{۱۰^۶}$ کمتر شود. x را باید از چه عددی کوچک‌تر در نظر بگیریم؟

با توجه به نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ و جدول صفحه قبل می‌توان مشاهده کرد اگر x از طریق اعداد منفی از هر عدد منفی کوچک‌تر شود می‌توان مقدار $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه به صفر نزدیک کرد.

در این صورت می‌نویسیم : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۱}{x}=۰$

✤ **تذکر :** منظور از $x\to\pm\infty$ آن است که $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$ لذا با توجه به فعالیت‌های بالا به‌طور خلاصه می‌توان نوشت :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۱}{x}=۰$$

به‌طور کلی می‌توان گفت :

برای هر تابع $f(x)$ که روی بازه $(a\,,+\infty)$ تعریف شده باشد و با بزرگ شدن متغیر x مقدارهای $f(x)$ به عدد خاصی مانند L نزدیک شوند به‌گونه‌ای که $f(x)$ بتواند به هر مقدار که بخواهیم به L نزدیک شود به شرط آنکه x به اندازه کافی بزرگ انتخاب شده باشد در این حالت می‌گوییم با رفتن x به سمت $+\infty$، $f(x)$ به سمت L نزدیک می‌شود

و می‌نویسیم : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$

همچنین برای هر تابع $f(x)$ که در بازه $(-\infty\,,a)$ تعریف شده باشد و با کم شدن مقادیر x در اعداد منفی مقدارهای $f(x)$ به عدد خاصی مانند L نزدیک شوند. به‌گونه‌ای که $f(x)$ بتواند به هر مقدار که بخواهیم به L نزدیک شود به شرطی که x به اندازه کافی در اعداد منفی کم شده باشد. در این حالت می‌گوییم با رفتن x به سمت $-\infty$، $f(x)$ به سمت L نزدیک می‌شود و می‌نویسیم : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$

کار در کلاس

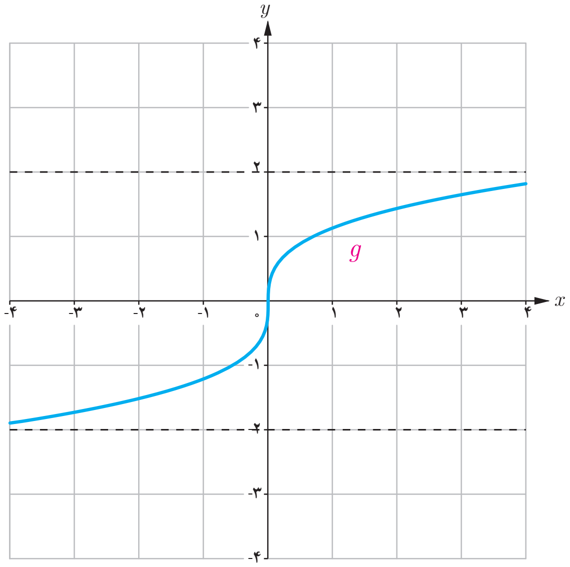
با استفاده از نمودارهای داده شده، حدود نامتناهی زیر را به‌دست آورید.

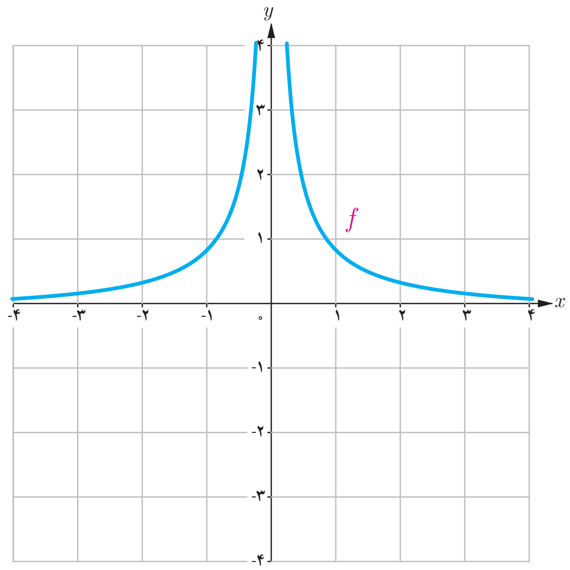
الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) =$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) =$





✤ **قضیه ۶** : اگر a عددی ثابت و n عددی طبیعی باشد آنگاه :

الف) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{a}{x^n} = 0$

✤ **قضیه ۷** : اگر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L_1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = L_2$ آنگاه :

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) \pm g(x)\big) = L_1 \pm L_2$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \times g(x) = L_1 L_2$

پ) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$ (با فرض $g(x) \neq 0$ و $L_2 \neq 0$)

✤ **تذکر** : قضیه فوق برای حالت $x \to -\infty$ نیز برقرار است.

✤ **مثال** : حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}(۳+\frac{۵}{x^۳})$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۲+\frac{۳}{x^۲}}{\frac{۵}{x}+۴}$

✤ **حل** :

الف) با استفاده از قسمت الف قضیه ۷ و سپس استفاده از قضیه ۶ می‌توان نوشت :

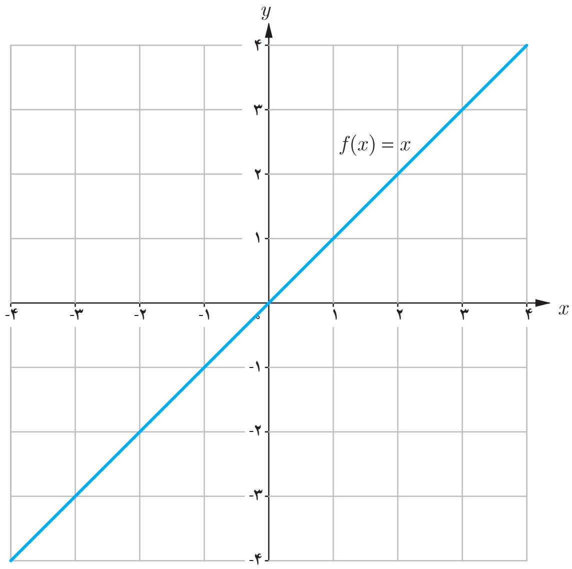
$$\lim_{x\to+\infty}(۳+\frac{۵}{x^۳})=\lim_{x\to+\infty}۳+\lim_{x\to+\infty}\frac{۵}{x^۳}=۳+۰=۳$$

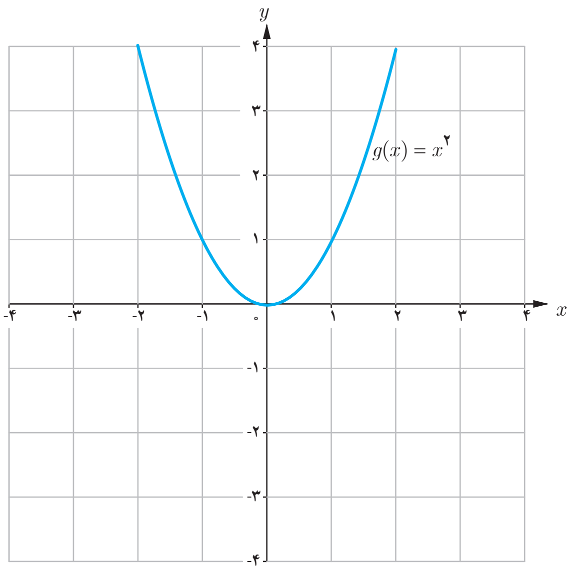
ب) با استفاده از قسمت (پ) قضیه ۷ و سپس استفاده از قضیه ۶ می‌توان نوشت :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۲+\frac{۳}{x^۲}}{\frac{۵}{x}+۴}=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}۲+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۳}{x^۲}}{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۵}{x}+\lim\limits_{x\to-\infty}۴}=\frac{۲+۰}{۰+۴}=\frac{۱}{۲}$$

حدود نامتناهی در بی‌نهایت

در محاسبه حد توابع در $+\infty$ یا $-\infty$ ممکن است، با بزرگ شدن مقادیر x مقدارهای $f(x)$ به عدد خاصی نزدیک نشوند و مقادیر $f(x)$ نیز بزرگ‌تر شوند و از هر عدد از پیش تعیین شده‌ای بزرگ‌تر شوند همان‌طور که در نمودار توابع $f(x)=x$ و $g(x)=x^۲$ در





شکل زیر دیده می‌شود با افزایش مقادیر x مقادیر $f(x)$ و $g(x)$ از هر عدد از پیش تعیین شده‌ای بزرگ‌تر می‌شوند.

همچنین ممکن است با کوچک شدن مقادیر x (منفی) مقدار $f(x)$ از هر عدد از پیش تعیین شده‌ای کوچک‌تر شود. در نمودارهای بالا می‌توان مشاهده کرد که با کاهش مقادیر x مقادیر $f(x)$ از هر عدد تعیین شده‌ای کوچک‌تر و مقادیر $g(x)$ از هر عدد از پیش تعیین شده‌ای بزرگ‌تر می‌شود.

در حالت کلی برای یک تابع f که در یک بازه $(a, +\infty)$ تعریف شده است اگر با رفتن x به سمت $+\infty$، $f(x)$ نیز به سمت $+\infty$ برود می‌گوییم حد این تابع در $+\infty$ برابر $+\infty$ است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

برای مثال $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

همچنین اگر با رفتن x به‌سمت $+\infty$، $f(x)$ به سمت $-\infty$ برود می‌گوییم حد این تابع در $+\infty$ برابر $-\infty$ است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ به عنوان مثال $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2=-\infty$

کار در کلاس

۱ به طریق مشابه مفاهیم $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ را بیان کنید.

۲ با توجه به نمودار توابع $y=x$ و $y=x^2$ حدود زیر را مشخص کنید.

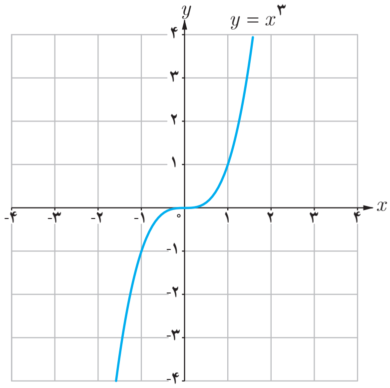
$$\lim_{x\to-\infty} x=$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^2=$$

تذکر: حدودی مانند $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$ و یا $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-\infty$ را حدود نامتناهی در بی‌نهایت می‌نامیم.

فعالیت

تابع $f(x)=x^3$ را با نمودار روبه‌رو در نظر بگیرید.



۱ جدول زیر را کامل کنید.

x	-10^6	-1000	-100	-1	1	10	100	1000	10^6
$f(x)$	...	...	-10^6	...	1	100	...	...	...

۲ با افزایش (کاهش) x، مقدار $f(x)$ چه تغییری می‌کند؟

۳ در مورد حدهای $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3$ چه می‌توان گفت؟

قضیه ۸ : اگر a عددی مثبت و n عددی طبیعی باشد آن‌گاه :

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} ax^n=+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} ax^n=\begin{cases}+\infty & \text{زوج } n\\ -\infty & \text{فرد } n\end{cases}$

مثال : حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3+x-1)$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-2x-5x^4)$

حل :

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3+x-1)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3(-2+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3})=\lim\limits_{x\to-\infty}-2x^3=+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-2x-5x^4)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^4(\frac{3}{x^4}-\frac{2}{x^3}-5)=\lim\limits_{x\to+\infty}-5x^4=-\infty$

به‌طور کلی حد هرچند جمله‌ای به‌صورت $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+...+l$ (n عدد طبیعی) در $\pm\infty$ برابر حد جمله‌ای از آن است که دارای بزرگ‌ترین درجه است یعنی :

$$\lim_{x\to\pm\infty} ax^n+bx^{n-1}+\dots+l=\lim_{x\to\pm\infty} ax^n$$

کار در کلاس

۱ الف) اگر $f(x) = ax^{n}+bx^{n-۱}+\dots+l$ و $g(x) = a'x^{m}+b'x^{m-۱}+\dots+l'$ دو چند جمله‌ای $(m,n \in \mathbb{N})$ باشند نشان دهید.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{a}{a'}x^{n-m}$$

ب) در هر یک از حالت‌های $m>n$ و $m<n$ و $m=n$ حد قسمت قبل به چه صورت‌هایی نوشته می‌شود؟

پ) حدود زیر را محاسبه کنید.

$$A=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۳x^{۲}-۷x+۱}{۲x^{۲}-x+۳}$$

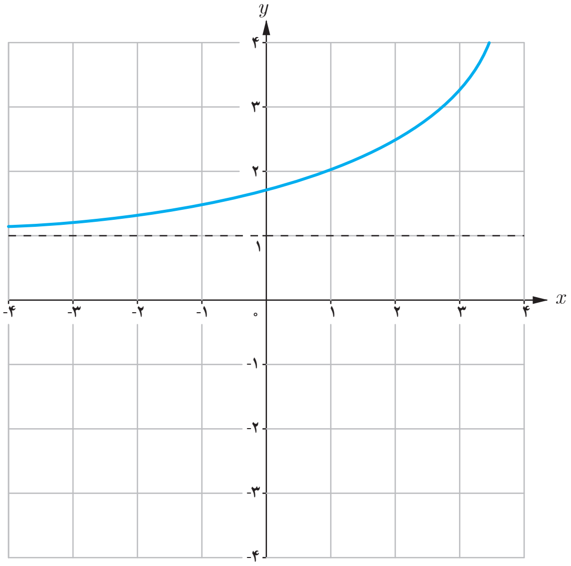
$$B=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-۳x^{۳}+x-۱}{۶x^{۳}-۲x+۱}$$

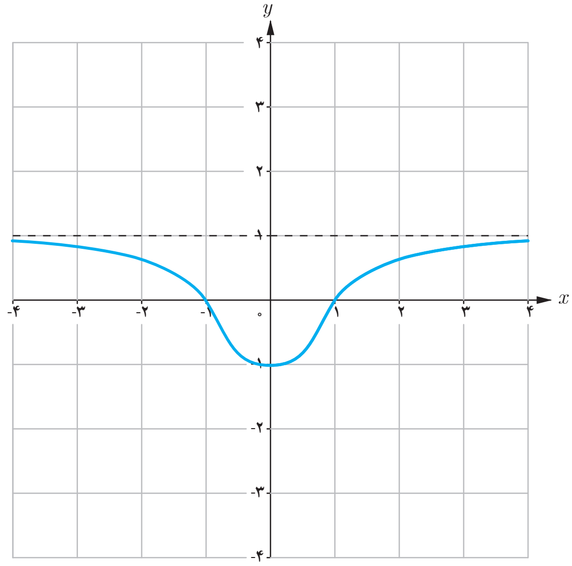
$$C=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^{۲}-x+۱}{۴x^{۳}+۲x-۱}$$

مجانب افقی

خط $y=L$ را مجانب افقی نمودار $y=f(x)$ می‌نامند به شرطی که $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ یا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$

به عنوان مثال در هر یک از نمودارهای زیر خط $y=۱$ یک مجانب افقی تابع است. چرا؟





✤ **مثال :** مجانب‌های افقی و قائم تابع $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ را به‌دست آورید.

✤ **حل :** برای یافتن مجانب افقی تابع داریم : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x+1}=2$

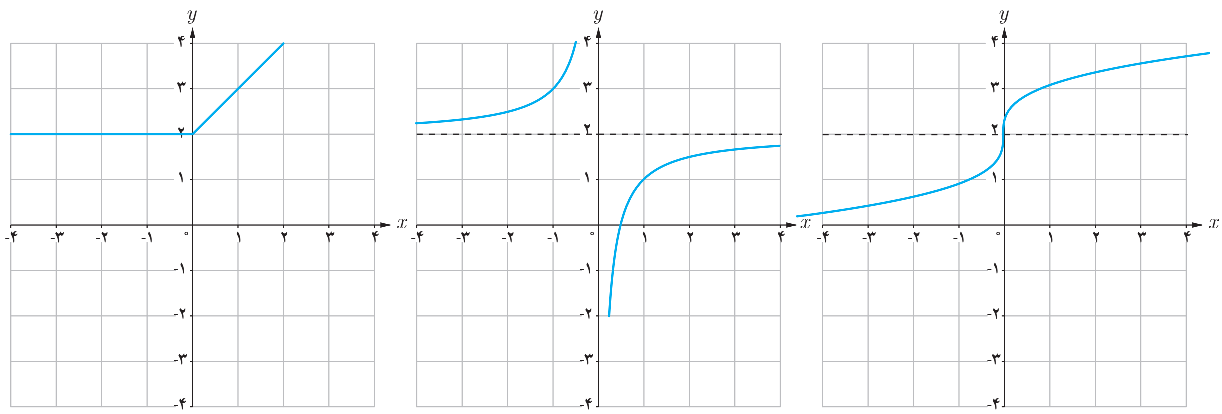
پس خط $y=2$ مجانب افقی تابع است.

این تابع دارای مجانب قائم نیز می‌باشد و خط $x=-1$ مجانب قائم تابع است زیرا :

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{2x+1}{x+1}=-\infty$$

کار در کلاس

۱ خط $y=2$ مجانب کدام‌یک از منحنی‌های زیر است؟



(پ) (ب) (الف)

۲ مجانب‌های افقی و قائم تابع‌های زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{x+1}{x^2-1}$

ب) $g(x)=x^3$

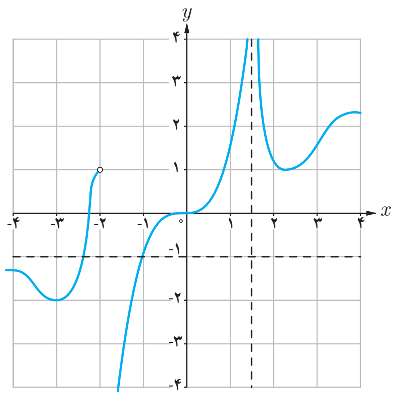
پ) $h(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$

تمرین

۱ مفهوم هر یک از گزاره‌های زیر را بیان کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=۲$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=۴$

۲ برای تابع f که نمودار آن داده شده است موارد زیر را به‌دست آورید :



الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$

پ) $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=$

ت) $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)=$

ث) $\lim\limits_{x\to -۲^+} f(x)=$

ج) همه مجانب‌ها

۳ حدود زیر را در صورت وجود به‌دست آورید :

الف) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{۳x+۵}{x-۲}$ ب) $\lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{t^۲+۱}{t^۳-۲t^۲+۱}$

پ) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-x^۲+۲x}{۴x+۱}$ ت) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^۳-۲x^۲)$

۴ مجانب‌های افقی و قائم نمودارهای هر یک از توابع زیر را به‌دست آورید :

الف) $y=\dfrac{۲x-۱}{x-۳}$

ب) $y=\dfrac{x}{x^۲-۴}$

پ) $y=\dfrac{۱+۲x^۲}{۱-x^۲}$

۵ نمودار تابع f را به‌گونه‌ای رسم کنید که همه شرایط زیر را دارا باشد :

الف) $f(۱)=f(-۲)=۰$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰} f(a)=-\infty \ , \ \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=+\infty$

ت) خط $y=-۱$ مجانب افقی آن باشد.

۶ آیا ممکن است نمودار $y=f(x)$ یکی از مجانب‌های قائمش را قطع کند؟

آیا ممکن است یکی از مجانب‌های افقی‌اش را قطع کند. جواب‌هایتان را با رسم نمودار توضیح دهید.

مشتق

فصل ۴

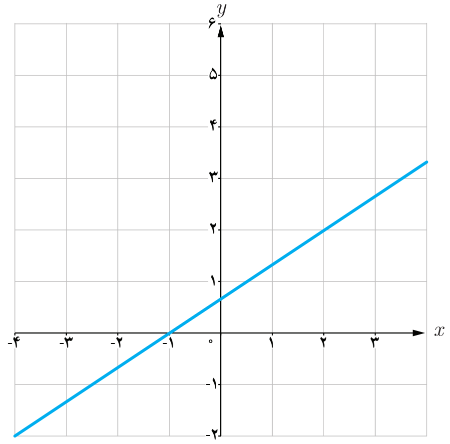
درس ۱

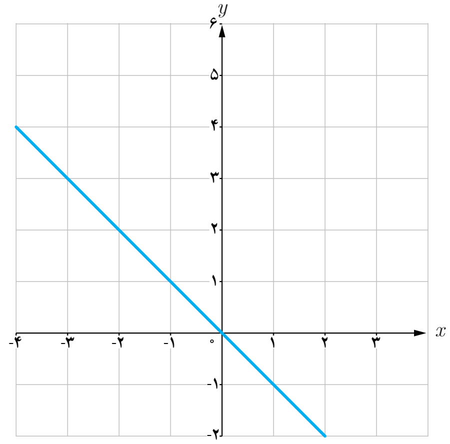
آشنایی با مفهوم مشتق

مشتق یکی از مفاهیم اساسی ریاضی است که دارای کاربردهای وسیع در ریاضیات و علوم دیگر است. ایده‌های اولیه در مورد مفهوم مشتق به شیب یک خط مربوط می‌شود. با شروع از این ایده به تدریج به‌صورت دقیق‌تری با مفهوم مشتق آشنا می‌شویم.

فعالیت

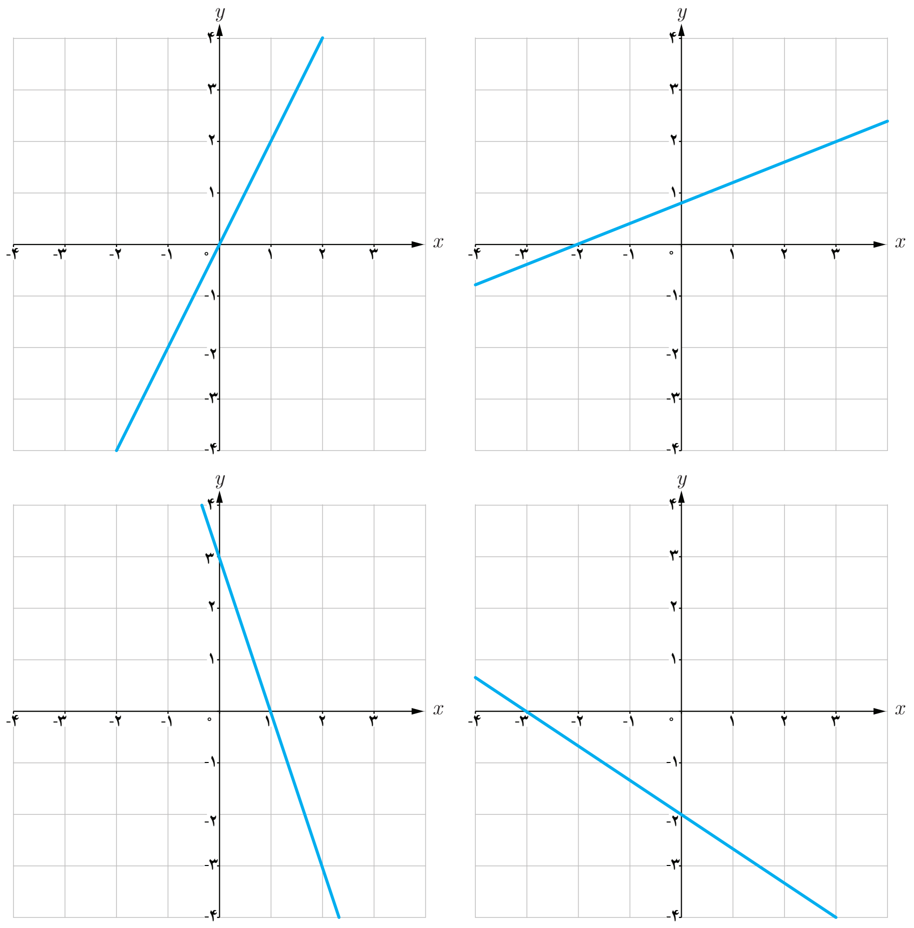
۱ شیب هر یک از خط‌های داده شده را به‌دست آورید و مشخص کنید که کدام یک مثبت و کدام یک منفی است؟



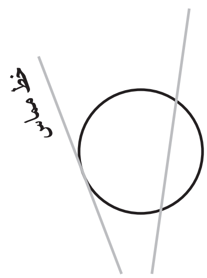


۲ با توجه به جدول خط‌های $d_۱$, $d_۲$, $d_۳$ و $d_۴$ را روی شکل مشخص کنید.

خط	$d_۱$	$d_۲$	$d_۳$	$d_۴$
شیب	$\frac{۲}{۵}$	-۳	۲	$-\frac{۲}{۳}$

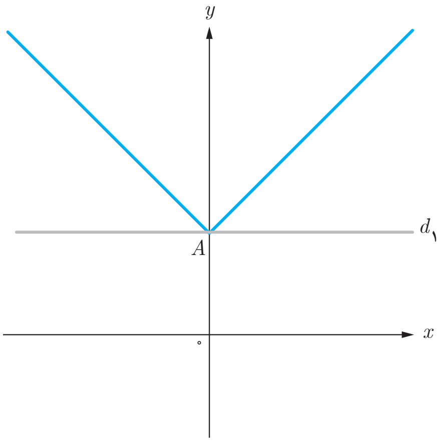


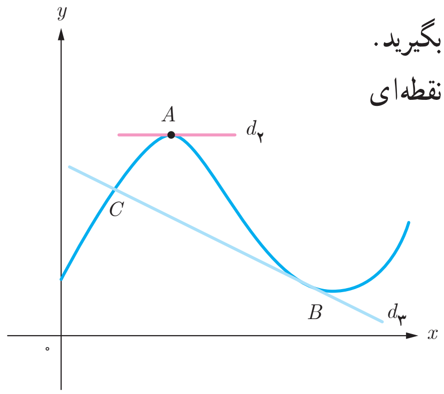
خط مماس بر یک منحنی

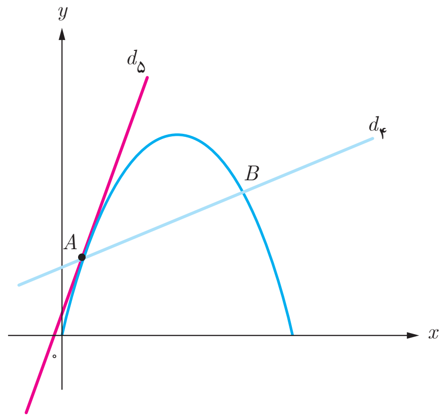


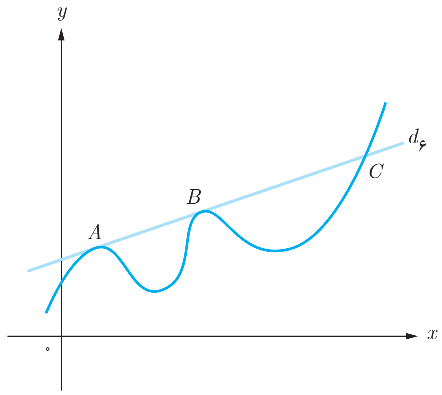
یافتن خط مماس در یک نقطه از یک منحنی مسئله‌ای تاریخی است که زمانی طولانی برای حل آن صرف شده است. مفهوم خط مماس بر یک دایره از زمان‌های گذشته مشخص بوده است. خط مماس بر دایره، خطی است که یکی از نقاطش بر دایره و کلیه نقاط دیگرش خارج آن هستند، به عبارت دیگر خط در یک نقطه با دایره تماس دارد. مسئله مهم این است که آیا این تعریف را می‌توان به منحنی‌های دیگر تعمیم داد؟

خط‌های d_1 تا d_6 را در نظر بگیرید. مشخص کنید که هر کدام در چه نقطه‌ای بر منحنی داده شده مماس است.



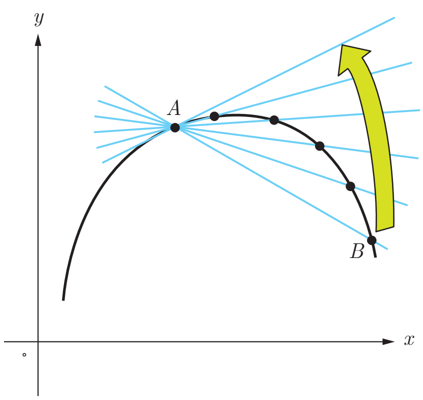






فعالیت

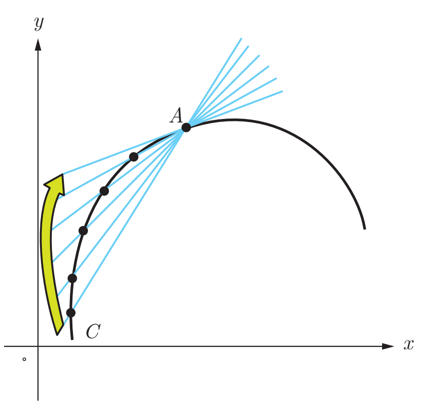
اکنون سعی می‌کنیم که به کمک نمودار منحنی، خط مماس بر منحنی در یک نقطه را بررسی کنیم. نقطه ثابت A را روی منحنی مقابل در نظر می‌گیریم. خطی که از A و B می‌گذرد یک خط قاطع نامیده می‌شود. روی منحنی نقطه‌های دیگری را نزدیک‌تر به نقطه A اختیار می‌کنیم و خط‌های گذرنده از A و آن نقطه‌ها را رسم می‌کنیم. حدس بزنید که وقتی نقاط به قدر کافی به A نزدیک می‌شوند، برای خط‌های قاطع چه اتفاقی می‌افتد؟ به‌عبارت دیگر خط‌های قاطع به چه خطی نزدیک می‌شوند؟



اکنون نقطه C را قبل از نقطه A اختیار می‌کنیم و خط قاطع AC را رسم می‌کنیم. مانند قبل نقاط دیگری را نزدیک‌تر به نقطه A اختیار می‌کنیم. حدس می‌زنید برای خط‌های قاطع چه اتفاقی می‌افتد؟ به‌طور شهودی می‌توان گفت:

خط مماس بر منحنی در نقطه A حد خط‌های قاطع گذرنده از A است به شرطی که نقطه‌ها به قدر کافی به A نزدیک شوند.

در ادامه این بحث را دقیق‌تر بررسی خواهیم کرد.

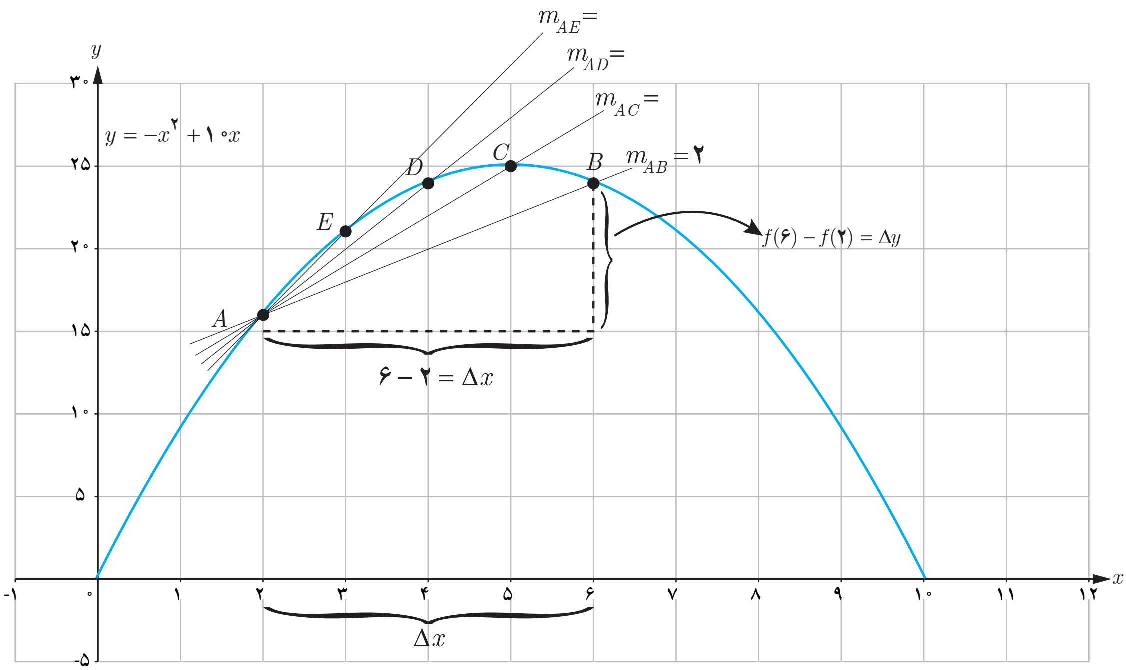


فعالیت

الف) تابع $f(x)=-x^۲+۱۰x$ داده شده است، اگر $۰\leq x\leq ۱۰$ نقاط $A(۲,f(۲))$ و $B(۶,f(۶))$ و $C(۵,f(۵))$ و $D(۴,f(۴))$ و $E(۳,f(۳))$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم. شیب خطی که از نقاط A و B می‌گذرد یعنی m_{AB} از دستور زیر به‌دست می‌آید :

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{f(۶)-f(۲)}{۶-۲}=\frac{۲۴-۱۶}{۴}=\frac{۸}{۴}=۲$$

به همین روش m_{AC} و m_{AD} و m_{AE} را به‌دست آورید.



همان‌طور که می‌دانید برای محاسبه شیب خط AB نسبت جابه‌جایی (تغییر) عمودی را به جابه‌جایی (تغییر) افقی به‌دست می‌آوریم. اگر این جابه‌جایی‌ها را به ترتیب با Δy و Δx نمایش دهیم، داریم :

$$m_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

در هنگام محاسبه شیب‌های بالا، توضیح دهید که Δxها چگونه تغییر می‌کنند؟

[۲,۶] ۲ ________________ ۶ $\Delta x=۶-۲=۴$

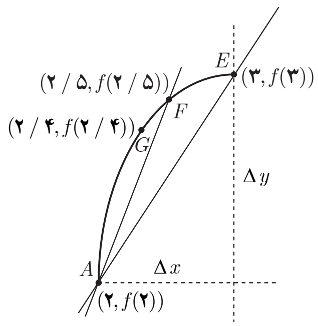
[۲,۵] ۲ _____________ ۵ $\Delta x=۵-۲=۳$

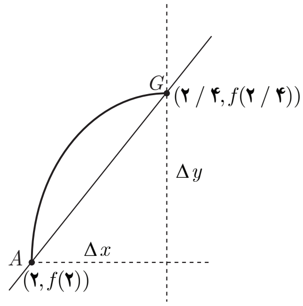
[۲,۴] ۲ __________ ۴ $\Delta x=۴-۲=۲$

[۲,۳] ۲ _______ ۳ $\Delta x=۳-۲=۱$

ب) حال فرض کنید که با ادامه روندی که در قسمت (الف) اختیار کردیم، نقاط بیشتری را نزدیک به A انتخاب کنیم. شیب

خطوط به‌دست آمده به شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A نزدیک می‌شود. برای درک بهتر این موضوع، منحنی $f(x)=-x^{۲}+۱۰x$ در فاصله [۲و۳] رسم شده است. در ادامه نمودار منحنی در بازه [۲و۲/۴] رسم شده است.





$$m_{AF}=\frac{f(۲/۵)-f(۲)}{۲/۵-۲}=\frac{۱۸/۷۵-۱۶}{۰/۵}=\frac{۲/۷۵}{۰/۵}=۵/۵$$

$$m_{AG}=\frac{f(۲/۴)-f(۲)}{۲/۴-۲}=\underline{\qquad\qquad}=$$

اگر به همین ترتیب بازه‌های کوچک‌تری در نظر بگیریم، با تکمیل جدول برای هر بازه داده شده، شیب خط‌های قاطع جدید را به‌دست آورید و شیب خط مماس را حدس بزنید.

بازه $[a,b]$	شیب خطی که از نقاط $(a,f(a))$ و $(b,f(b))$ می‌گذرد. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
[۲,۲/۴]	$\frac{f(۲/۴)-f(۲)}{۲/۴-۲}=\underline{\qquad}=\underline{\qquad}=۵/۶$
[۲,۲/۳]	$\underline{\qquad}=\underline{\qquad}=\underline{\qquad}=$
[۲,۲/۲]	$\frac{f(۲/۲)-f(۲)}{۲/۲-۲}=\frac{۱۷/۱۶-۱۶}{۰/۲}=\frac{۱/۱۶}{۰/۲}=۵/۸$
[۲,۲/۱]	$\frac{f(۲/۱)-f(۲)}{۲/۱-۲}=\frac{۱۶/۵۹-۱۶}{۰/۱}=\frac{۰/۵۹}{۰/۱}=۵/۹$
[۲,۲/۰۱]	$\frac{f(۲/۰۱)-f(۲)}{۲/۰۱-۲}=\frac{۱۶/۰۵۹۹-۱۶}{۰/۰۱}=\frac{۰/۰۵۹۹}{۰/۰۱}=۵/۹۹$
[۲,۲/۰۰۱] ⋮	$\frac{f(۲/۰۰۱)-f(۲)}{۲/۰۰۱\quad ۲}=\frac{۱۶/۰۰۵۹۹۹-۱۶}{۰/۰۰۱}=۵\quad ۹۹۹$ ⋮ ⋮
$[۲,۲+h]$ (h یک عدد خیلی کوچک نزدیک به صفر)	$\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=\longrightarrow ?$

حدس می‌زنید که با ادامه این روند شیب خط‌های قاطع به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

اگر بخواهیم دقیق‌تر صحبت کنیم، باید در مورد مقادیر عبارت $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ وقتی h به قدر کافی نزدیک به صفر (و مثبت) است، بررسی کنیم. روند بالا این حدس را تقویت می‌کند که هر چقدر که بخواهیم می‌توانیم این مقادیر را به عدد۶ نزدیک کنیم مشروط بر آنکه h را به قدر کافی نزدیک به صفر (و مثبت) اختیار کنیم. به عبارت دیگر حدس می‌زنیم که : $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{2}=6$ کافی است مقدار حد بالا را حساب کنیم :

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-(2+h)^2+10(2+h)-16}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-(h^2+4h+4)+20+10h-16}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{-h^2-4h-\cancel{4}+\cancel{4}+10h}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-h^2+6h}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h(-h+6)}{h}=\lim_{h\to 0}(-h+6)=6$$

به طریق مشابه می‌توان دید که اگر نقاط روی منحنی را در سمت چپ A اختیار کنیم، به عبارت دیگر اگر بازه‌هایی مانند، [۲و۱/۵] و [۲و۱/۶] و [۲و۱/۷] و [۲و۱/۸] و... را در نظر بگیریم شیب خط‌های قاطع برابر با ۶/۵، ۶/۴ و ۶/۳ و ۶/۲ و... خواهد شد. به عبارت دیگر در این حالت هم شیب خط‌های قاطع به عدد ۶ به هر میزان که بخواهیم نزدیک می‌شوند، مشروط بر آنکه h به قدر کافی از چپ به صفر نزدیک شود.

یعنی :

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=6$$

بنابراین به طور کلی داریم :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=6$$

اگر f یک تابع باشد، شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه $A(a\,,f(a))$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی در نقطه } A=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

به شرط آنکه این حد موجود باشد. اگر حد بالا موجود نباشد، مماس بر منحنی در نقطه A تعریف نمی‌شود. همچنین حد بالا را گاهی شیب منحنی در a نیز می‌نامیم.

حد بالا را (در صورت وجود) مشتق تابع f در نقطه a می‌نامند و با $f'(a)$ نمایش می‌دهند. یعنی : $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

بنابراین $f'(2)=6$. در ادامه $f'(3)$ محاسبه شده است :

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-(3+h)^2+10(3+h)-21}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-9-6h-h^2+30+10h-21}{h}=\lim \; -h \quad +4h \; =\lim($$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h^2+4h}{h}=\lim_{h\to 0}(-h+4)=4$$

مثال : معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=-x^{۲}+۱۰x$ را در نقطه $A(۲,f(۲))$ بنویسید.

حل : $f'(۲)=۶=$ شیب خط مماس در نقطه A

$A\,(۲,f(۲))=(۲,۱۶)$

$y-۱۶=۶(x-۲)\Rightarrow y=۶x+۴$

کار در کلاس

معادله خط مماس بر منحنی تابع $y=-x^{۲}+۱۰x$ را در نقطه‌ای به طول ۳ بنویسید.

دستورهایی دیگر برای محاسبه مشتق

با نمادهای معرفی شده در فعالیت در مورد شیب خط‌های قاطع می‌توان دستورهای معادل دیگری برای محاسبه مشتق در یک نقطه به‌دست آورد، به‌طور مثال شیب خطی که از نقاط A و B می‌گذرد برابر است با :

$$m_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

و از آنجا :

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

مثال : اگر $f(x)=-x^{۲}+۱۰x$، $f'(۲)$ را از دستور بالا به‌دست آورید :

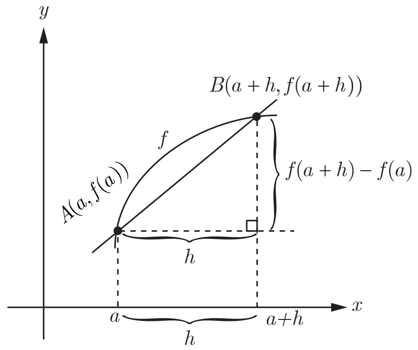
$$f'(۲)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(۲+\Delta x)-f(۲)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{-(۲+\Delta x)^{۲}+۱۰(۲+\Delta x)-۱۶}{\Delta x}$$

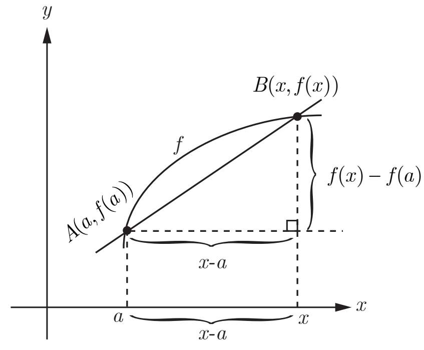
$$=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{-\cancel{۴}-\Delta x^{۲}-۴\Delta x+\cancel{۲۰}+۱۰\Delta x-\cancel{۱۶}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{-\Delta x^{۲}+۶\Delta x}{\Delta x}=۶$$

محاسبه $f'(a)$ به روش دیگر

مشتق تابع f در نقطه a به‌صورت زیر تعریف شد : $f'(a)=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ اکنون دستور دیگری برای مشتق تابع f در نقطه a می‌یابیم که در برخی محاسبات کار را ساده‌تر می‌کند.



(الف)



(ب)

در درس گذشته با نمودارهایی مشابه نمودار (الف) برای محاسبه مشتق f در a کار کرده‌اید. می‌دانیم :

$$AB \text{ شیب خط } = m_{AB} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$A \text{ شیب خط مماس بر منحنی در } = \lim_{h \to ۰} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

راه (معادل) دیگر محاسبه شیب خط مماس این است که نقطه دلخواه B را به مختصات $(x, f(x))$ در نظر بگیریم در این صورت در شکل ب داریم :

$$AB \text{ شیب خط } = m_{AB} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

برای محاسبه حد کافی است که x را مرتباً به a نزدیک کنیم. در این صورت شیب خط مماس برابر با $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ است مشروط بر اینکه این حد موجود باشد (واضح است که مانند قبل x باید از راست و چپ به a به قدر کافی نزدیک شود)

مثال : اگر $f(x)=x^۲$، $f'(۳)$ را به دو روش به‌دست آورید.

حل :

روش اول :

$$f'(۳) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(۳+h)-f(۳)}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{(h+۳)^۲-۹}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{h^۲+۶h+۹-۹}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{h^۲+۶h}{h}$$

$$= \lim_{h \to ۰} \frac{h(h+۶)}{h} = \lim_{h \to ۰}(h+۶) = ۶$$

روش دوم :

$$f'(۳) = \lim_{x \to ۳} \frac{f(x)-f(۳)}{x-۳} = \lim_{x \to ۳} \frac{x^۲-۹}{x-۳} = \lim_{x \to ۳} \frac{(x-۳)(x+۳)}{x-۳} = \lim_{x \to ۳}(x+۳) = ۶$$

در موقعیت‌های مختلف، ممکن است یکی از این دو روش بر دیگری به دلیل ساده‌تر بودن محاسبات برتری داشته باشد. معادل بودن این دو روش را به شیوه هندسی ملاحظه نمودید. در کار در کلاس ادامه به شیوه جبری نیز معادل بودن دو روش بالا را بررسی کنید.

کار در کلاس

اگر $f'(a)$ موجود باشد ثابت کنید.

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

راهنمایی : تغییر متغیر $a+h=x$ را به کار برید.

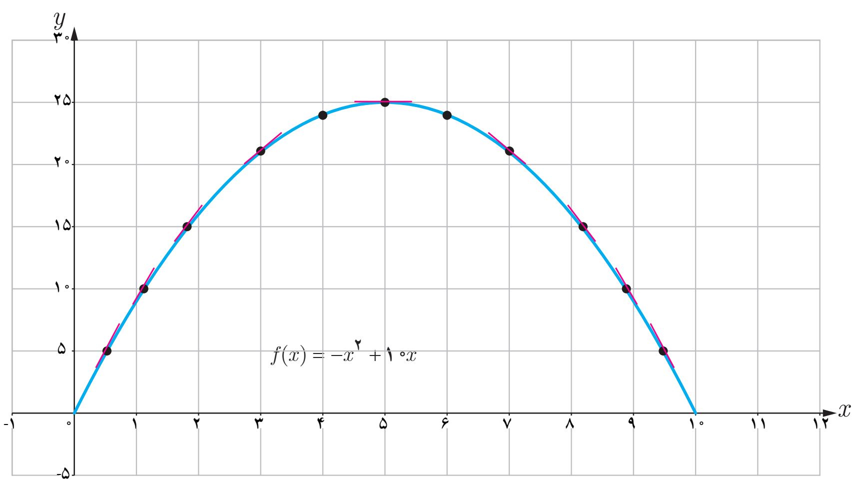
توجه داریم که وقتی $h\to ۰$ ، $x\to a$

کار در کلاس

الف) برای تابع $f(x)=-x^۲+۱۰x$ ، $f'(۸)$ و $f'(۵)$ را حساب کنید.

ب) دو نقطه روی منحنی مشخص کنید که مقدار مشتق تابع در آنها قرینه یکدیگر باشد.

پ) به کمک شکل توضیح دهید که تابع در چه نقاطی دارای مشتق مثبت و در چه نقاطی مشتق منفی است.



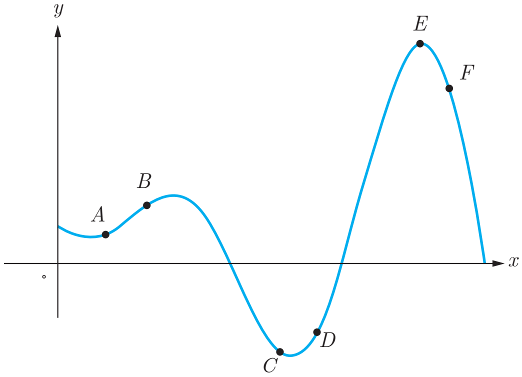
ت) بدون محاسبه و تنها به کمک نمودار شیب‌های خط‌های مماس بر منحنی در نقاط ۳ و ۴ را با هم مقایسه کنید. دلیل شما چیست؟

ث) با محاسبه مشتق تابع در نقاط ۳ و ۴ ($f'(۳)$ و $f'(۴)$) صحت حدس خود را بررسی نمایید.

تمرین

۱ اگر $f(x)=x^{۲}$ ، $f'(۲)$ را به‌دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ بنویسید.

۲ نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.



نقطه	شیب
	-۳
	-۱
	۰
	$\frac{۱}{۲}$
	۱
	۲

۳ برای نمودار $y=f(x)$ در شکل زیر اعداد داده شده را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.

الف) شیب نمودار در نقطه A

ب) شیب نمودار در نقطه B

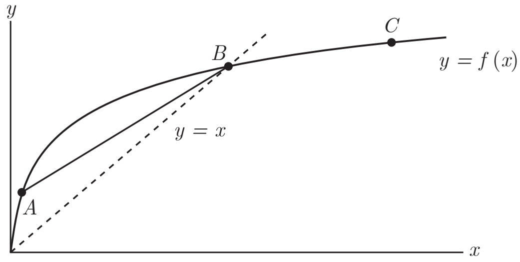
پ) شیب نمودار در نقطه C

ت) شیب خط AB

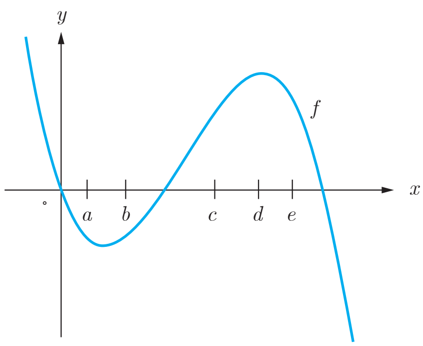
ث) شیب خط $y=۲$

ج) شیب خط $y=x$

شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب $m_۱$ ، $m_۲$ ، … و $m_۶$ در نظر بگیرید.



۴ با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط a,b,c,d و e را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.



$f'(x)$	x
۰	
۰/۵	
۲	
$-۰/۵$	
-۲	

۵ نقاطی مانند A,B,C,D,E,F و G را روی نمودار $y=f(x)$ مشخص کنید به طوری که :

الف) A، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب آن منفی است.

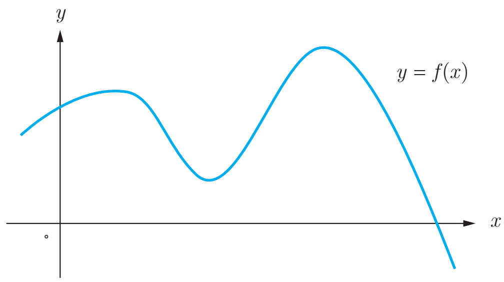
ب) B نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع در آن منفی است.

پ) C نقطه‌ای روی نمودار منحنی است که مشتق بزرگ‌ترین مقدار را (در بین بقیه این نقاط) دارد.

ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است.

ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.



۶ اگر $f(x)=-x^{۲}+۱۰x$ ، $f'(۰)$ را به‌دست آورید.

۷ نقاط $A,B,C,D,E,$ وF را روی منحنی روبه‌رو در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام یک نادرست است؟

الف) شیب منحنی در همه این نقاط مثبت است.

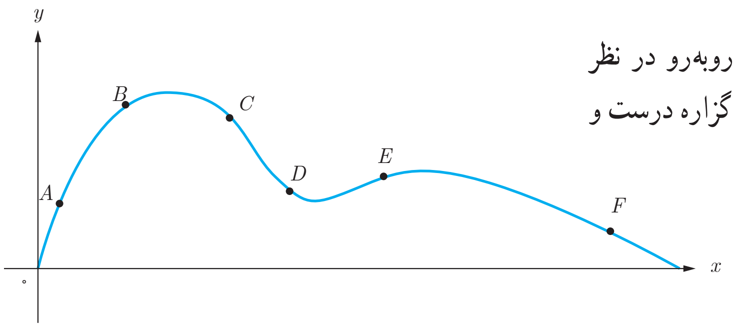
ب) $m_A<m_B$

پ) $m_E<m_B<m_A$

ت) شیب منحنی در نقاط F ،D و C منفی است.

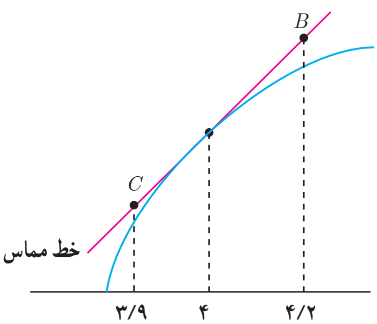
ث) $m_F<m_D<m_C$

ج) $m_C<m_D<m_F<m_E<m_B<m_A$



۸ برای تابع F در شکل زیر داریم : $f(۴)=۲۵, f'(۴)=۱/۵$

باتوجه به شکل مختصات نقاط A , B وC را بیابید.



۹ اگر برای تابع f داشته باشیم: $f'(۵)=۴$

الف) کدام یک از مقادیر زیر به $f'(۵)$ نزدیک‌تر است؟

$$\frac{f(۷)-f(۵)}{۷-۵}$$

$$\frac{f(۵/۲)-f(۵)}{۵/۲-۵}$$

$$\frac{f(۶)-f(۵)}{۶-۵}$$

ب) اگر بدانیم که علاوه بر این: $f(۵)=۷$ مقدار $f(۶)$ به کدام یک از مقادیر زیر نزدیک‌تر است؟

۵ ، ۱۰ ، ۱۱ ، ۸

درس ۲

مشتق‌پذیری و پیوستگی

در درس گذشته مشتق تابع f در نقطه‌ای مانند x_0 به یکی از دو صورت زیر تعریف شد :

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{یا} \quad f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

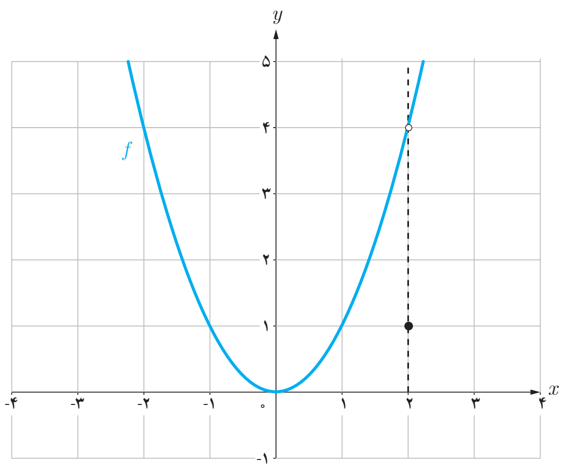
در صورت وجود حد گفته می‌شود که f در x_0 مشتق‌پذیر است.

در مطالعه رفتار یک تابع، مشخص کردن نقاطی که تابع در آن نقاط مشتق‌پذیر نیست هم دارای اهمیت است.

در فعالیت زیر با یکی از موقعیت‌هایی که یک تابع در آن مشتق‌پذیر نیست آشنا می‌شوید.

فعالیت

تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\neq 2 \\ 1 & x=2\end{cases}$ (شکل زیر) را درنظر می‌گیریم :



برای بررسی مشتق‌پذیری این تابع در $x=2$ تعریف مشتق f در $x=2$ را به‌کار می‌گیریم.

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x-2}=$$

حد صورت کسر برابر ۳ است و حد مخرج کسر برابر صفر است. اما وقتی $x \to ۲$، مخرج کسر با مقادیر متفاوتی به صفر نزدیک می‌شود، داریم:

$$\text{حد راست} = \lim_{x \to ۲^+} \frac{x^۲ - ۱}{x - ۲} = +\infty$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \to ۲^-} \frac{x^۲ - ۱}{x - ۲} = -\infty$$

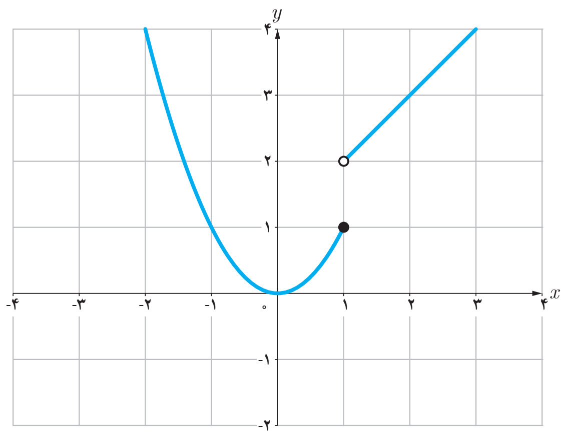
الف) چرا $f'(۲)$ موجود نیست؟

ب) نقطه دیگری (به‌جز $x=۲$) در نظر بگیرید. آیا تابع در این نقطه مشتق‌پذیر است؟ پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.

کار در کلاس

تابع g (شکل زیر) را به‌صورت $g(x) = \begin{cases} x^۲ & x \leq ۱ \\ x+۱ & x > ۱ \end{cases}$ درنظر می‌گیریم.

چرا $g'(۱)$ موجود نیست؟

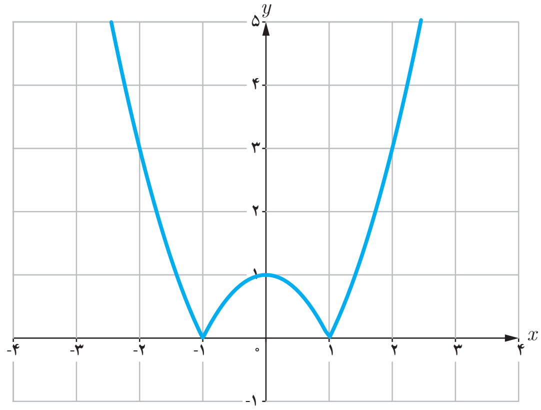


توابع f و g فعالیت و کار در کلاس قبل به ترتیب در $x=۲$ و $x=۱$ ناپیوسته بودند و همان‌گونه که مشاهده کردید، $f'(۲)$ و $g'(۱)$ موجود نبودند. در ادامه خواهید دید که ناپیوستگی تابع در یک نقطه، یکی از حالت‌هایی است که موجب می‌شود تابع در آن نقطه مشتق‌پذیر نباشد. در اینجا یک سؤال مهم مطرح می‌شود: اگر تابعی در یک نقطه پیوسته باشد، آیا در آن نقطه مشتق‌پذیر است؟

مثال بعد نشان می‌دهد که حتی با وجود پیوستگی تابع در یک نقطه، لزوماً نمی‌توان مشتق‌پذیری تابع در آن نقطه را نتیجه گرفت.

✤ **مثال :** مشتق‌پذیری تابع $f(x)=|x^{۲}-۱|$ را در $x=۱$ بررسی کنید.

$$f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{|x^{۲}-۱|-۰}{x-۱}$$

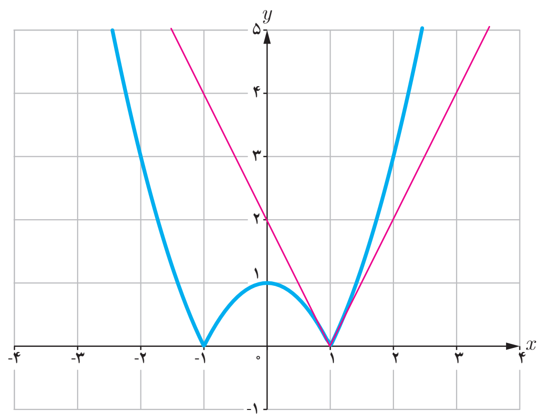


برای محاسبه $f'(۱)$ ناچاریم حدهای راست و چپ را به‌دست آوریم.

$$\text{حد راست}=\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{|x^{۲}-۱|}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{x^{۲}-۱}{x-۱}=۲$$

$$\text{حد چپ}=\lim_{x\to ۱^{-}}\frac{|x^{۲}-۱|}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^{-}}\frac{-(x^{۲}-۱)}{x-۱}=-۲$$

بنابراین $f'(۱)$ موجود نیست. به‌عبارت دیگر خط مماس بر منحنی در نقطه $x=۱$ وجود ندارد. اما حدهای یک‌طرفه فوق را می‌توان با وجود نیم‌خط‌های مماس بر منحنی در نقطه $x=۱$ توجیه کرد. اگر از سمت راست به نقطه $x=۱$ نزدیک شویم، شیب نیم‌خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر ۲ و اگر از سمت چپ به $x=۱$ نزدیک شویم، شیب خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر -۲ است. حدهای راست و چپ بالا را به ترتیب مشتق‌های راست و چپ f در $x=۱$ می‌نامیم و با $f'_{+}(۱)$ و $f'_{-}(۱)$ نمایش می‌دهیم.



در مثال فوق f در $x=1$ پیوسته است ولی f در $x=1$ مشتق‌پذیر نیست.

نیم‌خط‌های مماس راست و چپ را به اختصار، نیم مماس راست و چپ می‌نامیم.

در حقیقت: شیب نیم مماس راست $= f'_+(1)$ شیب نیم‌مماس چپ $= f'_-(1)$

معادله این نیم‌مماس‌ها نیز به ترتیب

$y - 0 = 2(x-1)$ یا $y = 2x - 2$ نیم مماس راست

$y - 0 = -2(x-1)$ یا $y = -2x + 2$ نیم مماس چپ

می‌باشند.

کار در کلاس

نشان دهید که مشتق f در $x=-1$ نیز موجود نیست.

در صورت امکان معادله نیم‌مماس‌های راست و چپ در $x=-1$ را بنویسید.

تعریف: مشتق راست و مشتق چپ تابع f در $x=a$ را با $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad , \quad f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

یا به‌طور معادل:

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad , \quad f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

با آنکه پیوستگی یک تابع لزوماً مشتق‌پذیری آن را نتیجه نمی‌دهد، امّا عکس آن همواره درست است، به‌عبارت دیگر:

قضیه: اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه f در a پیوسته است.

اثبات: کافی است نشان دهیم: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

$$\lim_{x \to a}(f(x)-f(a)) = \lim_{x \to a}\left((x-a)\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\right) =$$

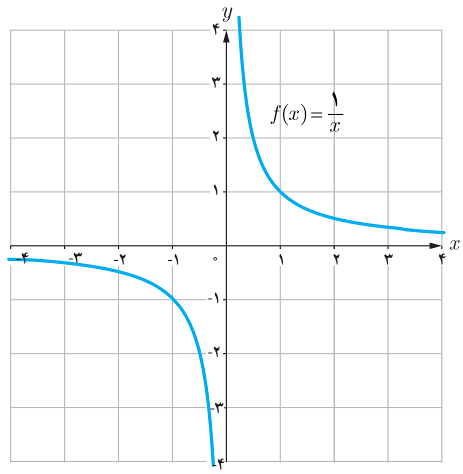
$$\lim_{x \to a}(x-a) . \lim_{x \to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right) = 0 . f'(a) = 0$$

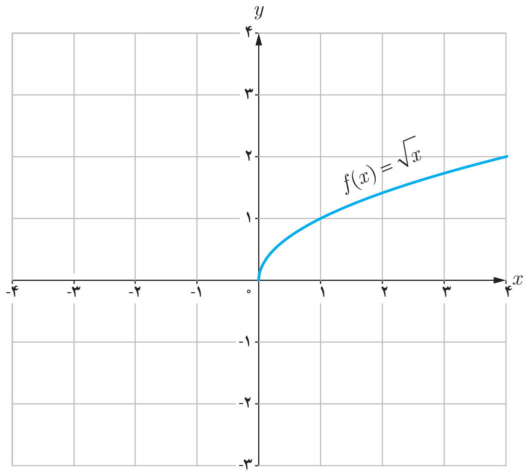
بنابراین $\lim_{x \to a}(f(x)-f(a)) = 0$ و از آنجا $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ (چرا؟)

با توجه به این قضیه به‌طور منطقی می‌توان نتیجه گرفت که:

> اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد، آن‌گاه f در $x=a$ مشتق‌پذیر هم نیست.

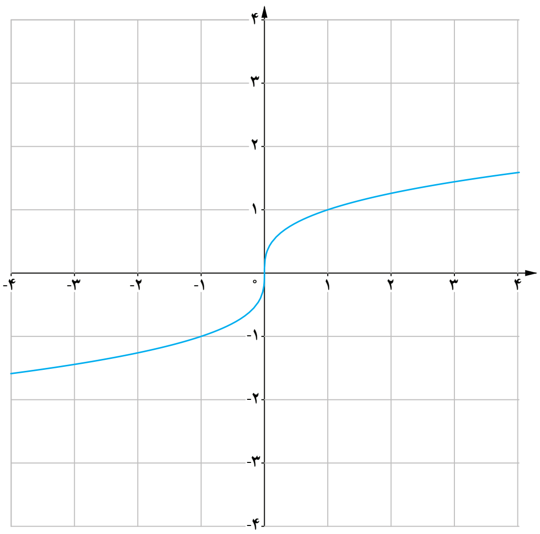
مثال: توابع $f(a)=\dfrac{1}{x}$ و $g(x)=\sqrt{x}$ در صفر پیوسته نیستند. بنابراین $f'(0)$ و $g'(0)$ موجود نیست.





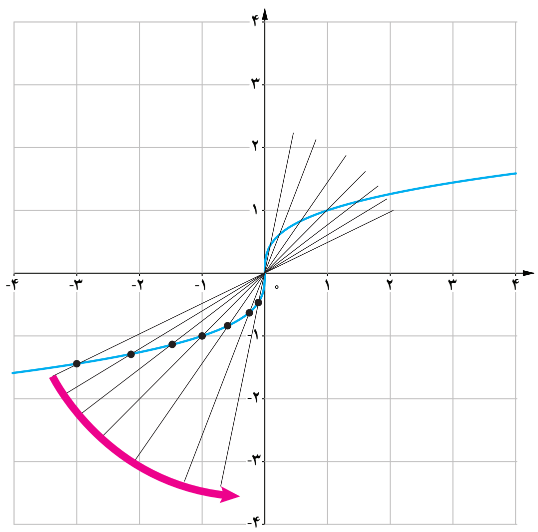
اکنون به بررسی حالت دیگری می‌پردازیم که در آن تابع مشتق‌پذیر نیست.

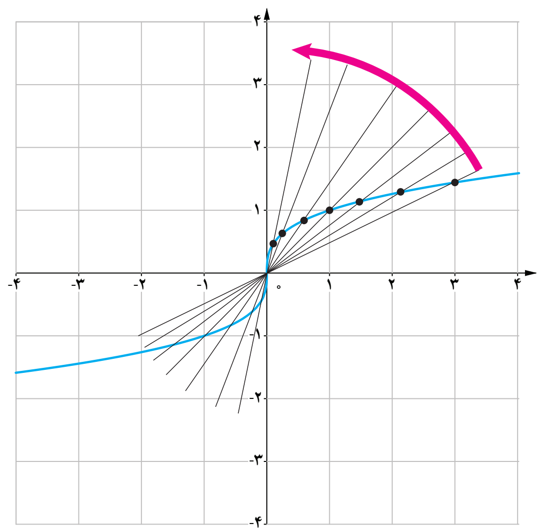
تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ را درنظر می‌گیریم. مشتق‌پذیری این تابع را در $x=0$ بررسی کنید.



$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}=\infty$$

شکل‌ها نشان می‌دهند که وقتی از سمت راست یا چپ به نقطه صفر نزدیک می‌شویم خط‌های قاطع به خط $x=0$ نزدیک می‌شوند.





تابع $y=\sqrt[3]{x}$ در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست و خط $x=0$ را مماس قائم منحنی می‌نامیم.

اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ یا $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$ در این‌صورت خط $x=a$ را مماس قائم بر منحنی f در نقطه $(a,f(a))$ می‌نامیم. بدیهی است $f'(a)$ در این حالت وجود ندارد.

به‌طور خلاصه می‌توان گفت:

تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر نیست هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

۱ f در a پیوسته نباشد.

۲ f در a پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x=a$.

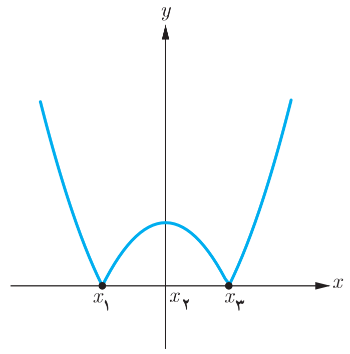
الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطه گوشه‌ای).

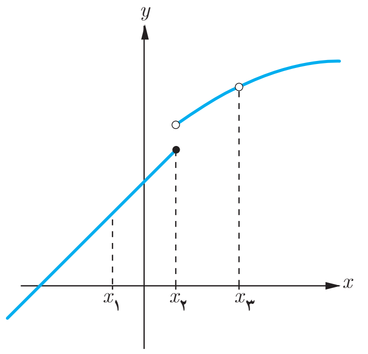
ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد.

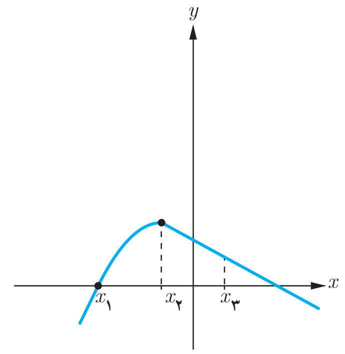
پ) هر دو نامتناهی باشند (مماس قائم).

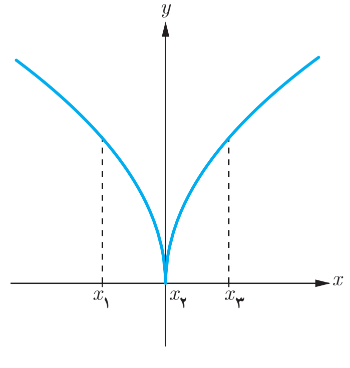
کار در کلاس

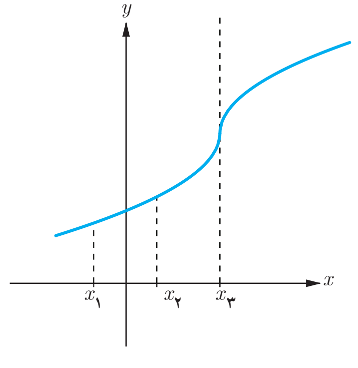
در هر شکل از بین نقاط x_1 و x_2 و x_3 کدام‌ها مشتق‌پذیر نیستند؟

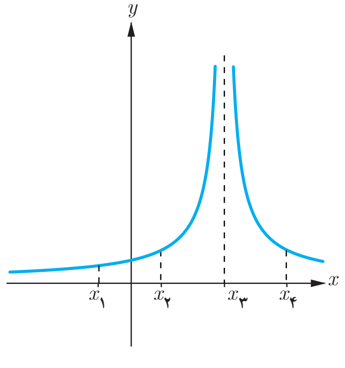








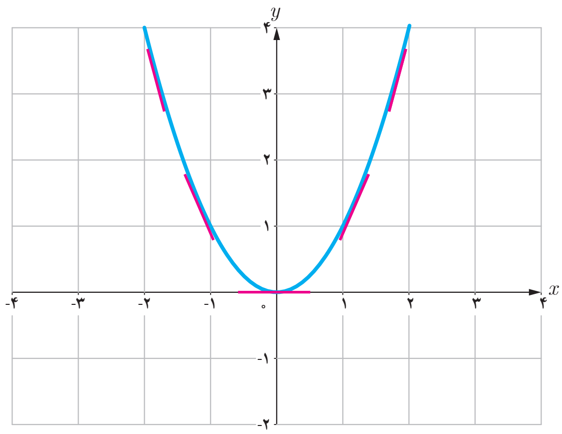




تابع مشتق

تاکنون با مفهوم مشتق تابع در یک نقطه معین آشنا شده‌اید. حال به دنبال یافتن رابطه‌ای بین نقاط متعلق به یک تابع و مشتق تابع در آن نقاط هستیم.

فعالیت



تابع $f(x)=x^{۲}$ را درنظر می‌گیریم.

جدول زیر را کامل کنید. (مشتق تابع در برخی نقاط حساب شده‌اند.)

x	-۳	-۲	-۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\sqrt{۳}$	۲
$f'(x)$		-۴		۰		$۲\sqrt{۳}$	۴

$$f'(-۲)=\lim_{x\to -۲}\frac{f(x)-f(-۲)}{x-(-۲)}=\lim_{x\to -۲}\frac{x^{۲}-۴}{x+۲}=\lim_{x\to -۲}(x-۲)=-۴$$

$$f'(\sqrt{۳})=\lim_{x\to \sqrt{۳}}\frac{f(x)-f(\sqrt{۳})}{x-\sqrt{۳}}=\lim_{x\to \sqrt{۳}}\frac{x^{۲}-۳}{x-\sqrt{۳}}=\lim_{x\to \sqrt{۳}}\frac{(x+\sqrt{۳})(x-\sqrt{۳})}{x-\sqrt{۳}}=۲\sqrt{۳}$$

$$f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۲}}{x}=۰$$

می‌دانیم مشتق تابع در یک نقطه (در صورت وجود) برابر شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه است و از طرفی مماس بر منحنی در هر نقطه یکتاست، بنابراین $f'(x)$ تابعی از x است. حدس می‌زنید در چه نقاطی مشتق تابع $f(x)=x^{۲}$ وجود دارد؟

اگر x عضوی از دامنه تابع f باشد، تابع مشتق f در x را با $f'(x)$ نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

مشروط بر آنکه حد فوق موجود باشد. تمام نقاطی از دامنه f که برای آنها f' موجود باشد را دامنه f' می‌نامیم.

به‌طور مثال برای تابع $f(x)=x^۲$ ، دامنه تابع f'، مجموعه اعداد حقیقی است. روش محاسبه ضابطه تابع f' نیز در ادامه ارائه شده است.

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(x+h)^۲-x^۲}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{x^۲+۲hx+h^۲-x^۲}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{h(۲x+h)}{h}=\lim_{h\to ۰}(۲x+h)=۲x$$

بنابراین $f'(x)=۲x$. همان‌گونه که قبلاً ذکر شد دامنه تابع f'، مجموعه اعداد حقیقی است. به کمک این دستور مقدار مشتق در هر نقطه را می‌توان حساب کرد، به‌طور مثال :

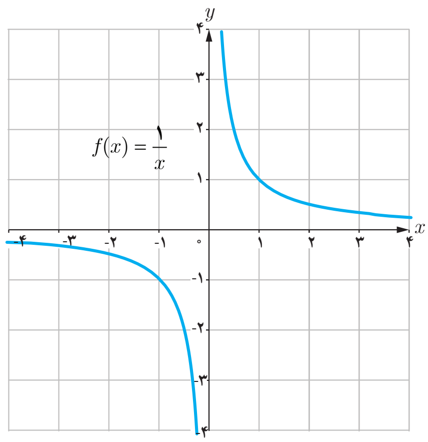
$$f'(-\frac{۱}{۵})=-\frac{۲}{۵}\ ,\ f'(\sqrt{۷})=۲\sqrt{۷}\ ,f'(۵۰)=۱۰۰$$

✤ **مثال :** اگر $f(x)=\frac{۱}{x}$ ، تابع مشتق و دامنه آن را به‌دست آورید. $f'(۳)$ را از دو روش به‌دست آورید : با استفاده از تابع مشتق و سپس به‌صورت مستقیم.

✤ **حل :** f در صفر ناپیوسته است، بنابراین $f'(۰)$ وجود ندارد و دامنه f' برابر $\mathbb{R}-\{۰\}$ است. اگر $x\neq ۰$ داریم :

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{۱}{x+h}-\frac{۱}{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{x-x-h}{hx(x+h)}=\lim_{h\to ۰}\frac{-h}{hx(x+h)}=\lim_{h\to ۰}\frac{-۱}{x(x+h)}=-\frac{۱}{x^۲}$$



با استفاده از دستور فوق داریم : $f'(۳)=\frac{-۱}{۹}$ البته مشتق f در هر نقطه دیگر $(x\neq ۰)$ را نیز به کمک این دستور می‌توان محاسبه کرد، به‌طور مثال : $f'(\sqrt{۵})=\frac{-۱}{۵}$ و $f'(-۲)=-\frac{۱}{۴}$ ، $f'(۳)$ را به‌طور مستقیم نیز می‌توان حساب کرد :

$$f'(۳)=\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{\frac{۱}{x}-\frac{۱}{۳}}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{\frac{۳-x}{۳x}}{\frac{x-۳}{۱}}=\lim_{x\to ۳}\frac{-\cancel{(x-۳)}}{۳x\cancel{(x-۳)}}=-\frac{۱}{۹}$$

در عمل هنگام حل مسائل با توجه به شرایط هر یک از دو روش فوق ممکن است مورد استفاده قرار گیرد.

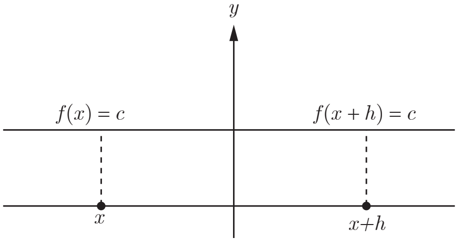
کار در کلاس

اگر $f(x)=\begin{cases}۵x & x\neq ۱\\ ۲ & x=۱\end{cases}$ دامنه f و دامنه f' را محاسبه کنید و ضابطه f' را به‌دست آورید.

اکنون آماده هستیم که برای برخی از توابع، تابع مشتق را محاسبه کنیم.

محاسبه تابع مشتق برخی توابع

۱ اگر $f(x)=c$ آن‌گاه $f'(x)=۰$. به‌عبارت دیگر مشتق تابع ثابت برابر صفر است.



$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۰}{h}=\lim_{h\to ۰}۰=۰$$

به‌طورمثال اگر $f(x)=۷$ و $g(x)=-\frac{۲}{۵}$ آن‌گاه $f'(x)=۰$ و $g'(x)=۰$.

۲ اگر $n \in \mathbb{N}$ و $f(x) = x^n$ آن‌گاه $f'(x) = nx^{n-1}$.

این دستور کاربرد زیادی دارد. قبلاً ثابت کردیم که اگر $f(x) = x^2$، آن‌گاه $f'(x) = 2x$. همچنین اگر $f(x) = x^3$، به‌کمک این دستور داریم:

$$f'(x) = 3x^2$$

ابتدا این رابطه آخر را ثابت می‌کنیم و از روش ارائه شده برای اثبات دستور مشتق $f(x) = x^n$ استفاده می‌کنیم. اگر $f(x) = x^3$ داریم:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h-x)[(x+h)^2 + x(x+h) + x^2]}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{h[(x+h)^2 + x(x+h) + x^2]}{h} = \lim_{h \to 0}((x+h)^2 + x(x+h) + x^2) = x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2$$

اکنون اگر $f(x) = x^n$، محاسبات کمی دشوارتر می‌شود، اما در عوض دستور مهم‌تری را ثابت کرده‌ایم.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\cancel{x} + h - \cancel{x})[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2} x + \cdots + (x+h) x^{n-2} + x^{n-1}]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} [(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2} x + \cdots + (x+h) x^{n-2} + x^{n-1}]$$

$$= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1} + x^{n-1}}_{n \text{ بار}} = nx^{n-1}$$

۳ به‌طور کلی اگر n یک عدد صحیح باشد و $f(x) = x^n$

آن‌گاه: $f'(x) = nx^{n-1}$

✤ **مثال:** اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ و $x \neq 0$ قبلاً دیدید که $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

اکنون با استفاده از دستور فوق داریم:

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

*۴ اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $x > 0$ آن‌گاه $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

---

* در مورد توابع رادیکالی در این کتاب فقط مشتق تابع $y = \sqrt{ax+b}$ و $y = \sqrt[3]{x}$ موردنظر است، این موضوع باید در ارزشیابی رعایت شود.

۵ اگر $f(x)=\sqrt{ax+b}$ و $ax+b>0$ آن‌گاه $f'(x)=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a(x+h)+b}-\sqrt{ax+b}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{a(x+h)+b}-\sqrt{ax+b})(\sqrt{a(x+h)+b}+\sqrt{ax+b})}{h(\sqrt{a(x+h)+b}+\sqrt{ax+b})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{ax}+ah+\cancel{b}-\cancel{ax}-\cancel{b}}{h(\sqrt{a(x+h)+b}+\sqrt{ax+b})}=\lim_{h\to 0}\frac{a}{\sqrt{a(x+h)+b}+\sqrt{ax+b}}=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$$

۶ اگر $f(x)=\sqrt[3]{x}$ آن‌گاه $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2})}{h\underbrace{(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2})}_{A}}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(A)}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

۷ اگر توابع f و g در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه توابع kf $(k\in\mathbb{R})$، $f\pm g$ ، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ $(g(a)\neq 0)$ نیز در $x=a$ مشتق‌پذیرند و داریم :

الف) $(f\pm g)'(a)=f'(a)+g'(a)$

ب) $(kf)'(a)=kf'(a)$

پ) $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$

ت) $(\frac{f}{g})'(a)=\frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$

به کمک تعریف مشتق هر یک از روابط بالا را می‌توان ثابت نمود، اما در این کتاب به اثبات آنها نمی‌پردازیم.

مثال : مشتق هر یک از توابع داده شده را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=-\frac{2}{3}x^4 \Rightarrow f'(x)=-\frac{8}{3}x^3$

ب) $g(x)=x^5+4x^3-\sqrt{2}x+1 \Rightarrow g'(x)=5x^4+12x^2-\sqrt{2}$

پ) $h(x)=(2x^3+1)(-x^2+7x-2) \Rightarrow h'(x)=6x^2(-x^2+7x-2)+(2x^3+1)(-2x+7)$

ت) $t(x)=\frac{x^2-4}{3x+1} \Rightarrow t'(x)=\frac{2x(3x+1)-3(x^2-4)}{(3x+1)^2}$

کار در کلاس

۱ مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید :

الف) $f(x)=\dfrac{۱}{x}$ ب) $g(x)=\sqrt{x}(۳x^{۲}+۵)$ پ) $h(x)=\dfrac{x}{۲x^{۲}+x-۱}$

۲ اگر $f(۲)=۳$ و $f'(۲)=۵$ و $g(۲)=۸$ و $g'(۲)=-۶$

مطلوب است $(fg)'(۲)$ و $(\dfrac{f}{g})'(۲)$

مشتق توابع مثلثاتی

توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ مشتق‌پذیر هستند و داریم :

$f'(x)=\cos x$ و $g'(x)=-\sin x$

اثبات : با استفاده از تعریف مشتق داریم :

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\sin x(\cos h-۱)+\cos x\sin h}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}(\sin x\frac{\cos h-۱}{h})+\lim_{h\to ۰}(\cos x\frac{\sin h}{h})$$

در حسابان (۱) دیدیم که :

$$\lim_{h\to ۰}\frac{\cos h-۱}{h}=۰\ ,\ \lim_{h\to ۰}\frac{\sin h}{h}=۱$$

بنابراین : $f'(x)=(\sin x)(۰)+(\cos x)(۱)\Rightarrow f'(x)=\cos x$

به طریق مشابه اگر $g(x)=\cos x$ داریم :

$$g'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\cos x(\cos h-۱)-\sin x\sin h}{h}$$
$$\lim_{h\to ۰}\cos x\lim_{h\to ۰}\frac{(\cos h-۱)}{h}-\lim_{h\to ۰}\sin x\lim_{h\to ۰}\frac{\sin h}{h}$$
$$=(\cos x)(۰)-(\sin x)(۱)=-\sin x\Rightarrow g'(x)=-\sin x$$

با استفاده از دو دستور فوق می‌توان مشتق بسیاری از توابع مثلثاتی را به‌دست آورد.

مثال : مشتق $f(x) = \text{tg}x$ را به‌دست آورید.

$$f(x) = \text{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(\cos x)(\cos x) + (\sin x)(\sin x)}{\cos^۲ x} = \frac{۱}{۱+\cos^۲ x} = ۱ + \text{tg}^۲ x$$

کار در کلاس

مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x) = \sin x \ \text{tg}x$

ب) $g(x) = \frac{۵\cos x}{۱-\sin x}$

مشتق تابع مرکب / قاعده زنجیری

اگر f و g دو تابع باشند، ترکیب f با g را با fog نمایش می‌دهیم، در این صورت مشتق تابع مرکب fog در نقطه x از دستور زیر به‌دست می‌آید :

$$(fog)'(x) = g'(x)f'(g(x))$$

مثال : اگر $h(x) = (x^۲+۳x+۱)^۷$، مطلوب است $h'(x)$.

حل : اگر $f(x) = x^۷$ و $g(x) = x^۲+۳x+۱$. آن‌گاه : $h(x) = f(g(x))$

$$h'(x) = g'(x)f'(g(x)) = (۲x+۳) = f'(g(x))$$

اگر $g(x) = u$ آن‌گاه لازم است که $f'(u)$ را پیدا کنیم.

$$f(u)= u^۷ \Rightarrow f'(u) = ۷u^۶ = ۷(g(x))^۶ = ۷(x^۲+۳x+۱)^۶$$

بنابراین :

$$h'(x) = (۲x+۳)(۷)(x^۲+۳x+۱)^۶$$

دستور فوق را به صورت زیر نیز می‌توان ارائه کرد :

اگر u تابعی از x و f تابعی از u باشد :

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$$

مثال : مشتق تابع $y = \sin^۲ x$ را به‌دست آورید.

حل : با فرض $\sin x = u$ داریم : $y = u^۲$ و از آنجا :

$$y' = u' \cdot ۲u = (\cos x)(۲)(\sin x) = ۲\sin x \cos x$$

کار در کلاس

مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x) = (x^{۲}+۱)^{۳}(۵x-۱)$

ب) $g(x) = \cos^{۳} x$

مشتق‌پذیری روی یک‌بازه

تابع f روی بازه $(a\,,b)$ مشتق‌پذیر است هرگاه، در هر نقطه این بازه مشتق‌پذیر باشد.

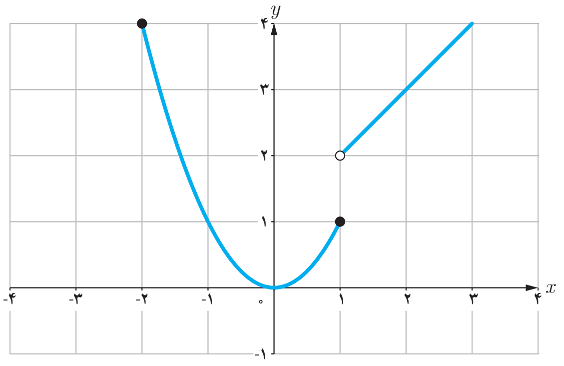
تابع f روی بازه $[a\,,b]$ مشتق‌پذیر است، هرگاه f در بازه $(a\,,b)$ مشتق‌پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست و در b مشتق چپ داشته باشد.

کار در کلاس

مشتق‌پذیری روی بازه‌های $[a\,,b)$ و $(a\,,b]$ را به‌طور مشابه تعریف کنید.

تابع f روی بازه $[a\,,b)$ مشتق‌پذیر است هرگاه ...

تابع f روی بازه $(a\,,b]$ مشتق‌پذیر است هرگاه ...



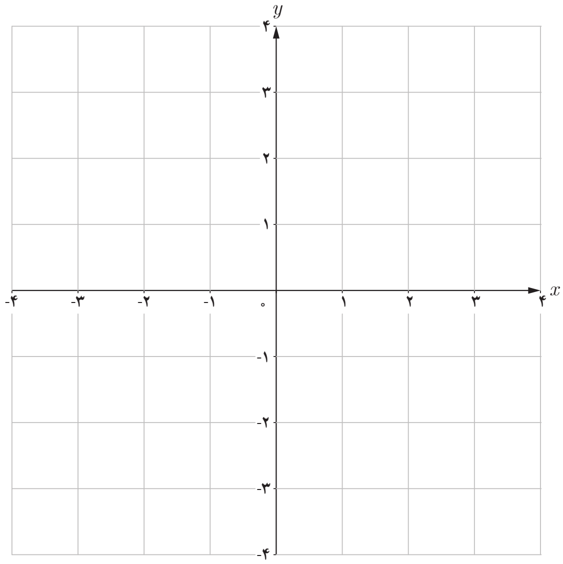
اگر $D_f = \mathbb{R}$ و f در هر عدد حقیقی مشتق‌پذیر باشد، گوییم f روی بازه $(-\infty, +\infty)$ پیوسته است.

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} x^{۲} & -۲ \le x \le ۱ \\ x+۱ & x > ۱ \end{cases}$ را درنظر می‌گیریم.

f روی بازه‌های $[-۲\,,۱]$ و $(۱, \infty)$ مشتق‌پذیر است. ولی f روی بازه $[۱\,,۲]$ مشتق‌پذیر نیست (چرا؟)

کار در کلاس

اگر $f(x)=\begin{cases} ۲x+۴ & x<-۱ \\ x^۲-۱ & -۱\le x<۲ \\ -x+۵ & ۲<x<۵ \end{cases}$. مشتق‌پذیری f را روی بازه‌های $[-۱\,,\,۱]$، $(۲\,,\,۵)$ و $[-۲\,,\,۰]$ بررسی کنید.



مشتق مرتبه دوم و سوم

مشتق تابع $y=f(x)$ با نماد $y'=f'(x)$ نمایش داده شد. به همین ترتیب مشتق مرتبه دوم $y=f(x)$ را به $y''=f''(x)$ نمایش می‌دهیم و برای محاسبه آن از تابع $y'=f'(x)$ نسبت به x مشتق می‌گیریم. مشتق مرتبه سوم $y'''=f'''(x)$ نیز به‌طریق مشابه تعریف می‌شود.

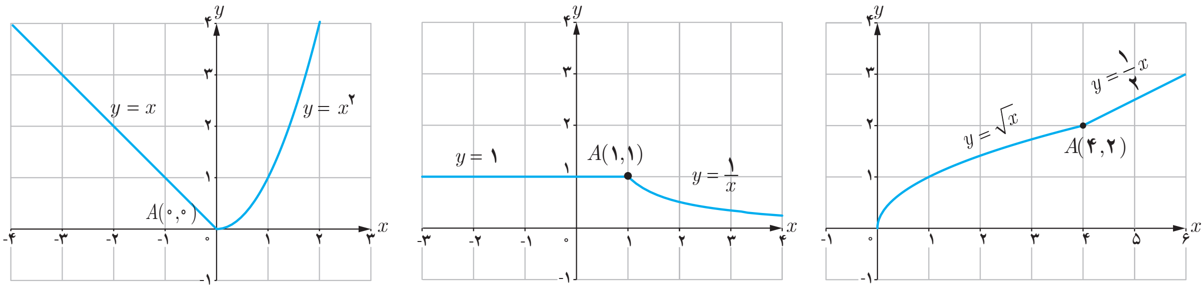
مثال : اگر $y=۳x^۴+۲x^۲-۱$ آن‌گاه :

$$y'=۱۲x^۳+۴x\,,\ y''=۳۶x^۲+۴\,,\ y'''=۷۲x$$

تمرین

۱ دو تابع مختلف مانند f و g مثال بزنید که هر دو در $x=۲$ پیوسته باشند ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نباشند.

۲ با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده شده در نقطه A، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق‌پذیر نیستند.



۳ اگر
$$f(x)=\begin{cases} ۵x-۴ & x<۰ \\ x^۲ & ۰\le x\le ۳ \\ x+۶ & x>۳ \end{cases}$$

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

ب) نشان دهید که $f'(۰)$ و $f'(۳)$ وجود ندارند.

پ) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.

۴

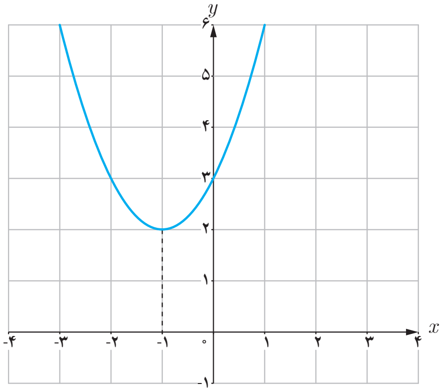
الف) نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن در یک نقطه برابر صفر شود.

ب) نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن در $x=۲$ برابر ۳ شود.

پ) نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن در تمام نقاط مثبت باشد.

ت) نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن در تمام نقاط یکسان باشد.

۵



الف) با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ (شکل مقابل) مقادیر زیر را به‌ترتیب صعودی مرتب کنید.

$f'(3)$ و $f'(0)$ و $f'(-1)$ و $f'(2)$

ب) صحت ادعای خود در (الف) را با محاسبه مشتق تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ بررسی کنید.

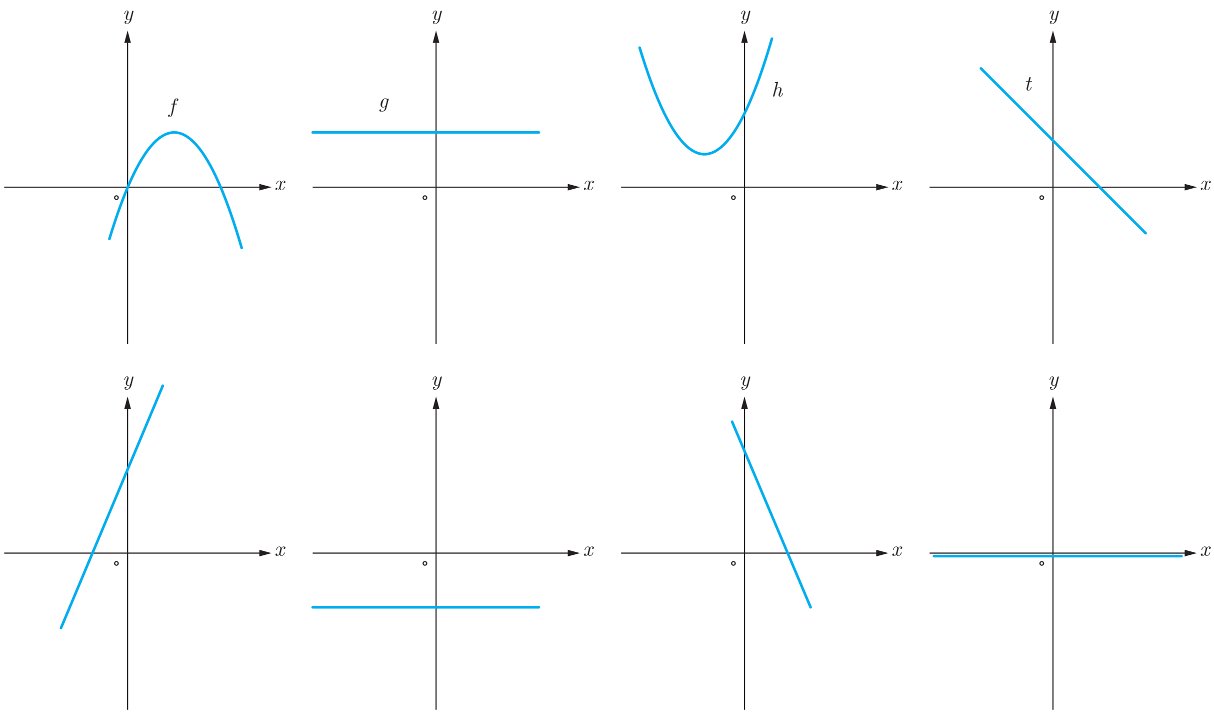
پ) تابع مشتق را رسم کنید.

۶ ثابت کنید که مشتق تابع $y = mx + h$ شیب خط $y = mx + h$ است.

۷ سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آنها با هم برابر باشند.

۸ اگر $f(x) = |x^2 - 4|$. به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری f را در نقاط ۲ و ۲− بررسی و نمودار f' را رسم کنید.

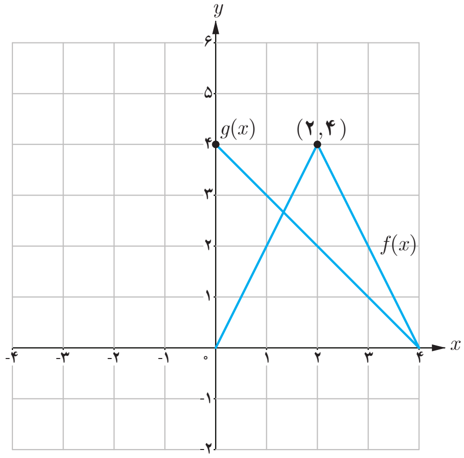
۹ نمودار توابع f و g و h و t را به نمودار مشتق آنها، نظیر کنید.



۱۰ نمودار توابع f و g را در شکل زیر درنظر بگیرید.

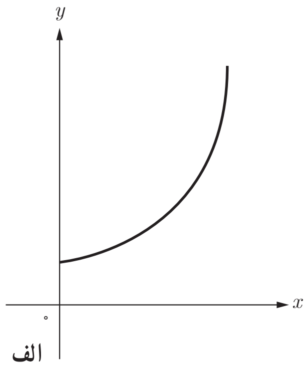
الف) مطلوب است $h'(۱)$ ، $h'(۲)$ و $h'(۳)$

ب) اگر $k(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است، $k'(۱)$ ، $k'(۲)$ و $k'(۳)$

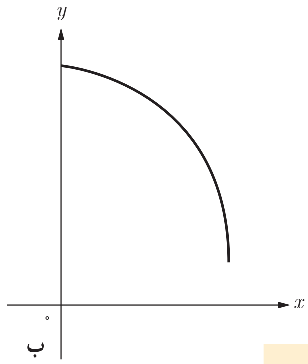


۱۱ اگر $f'(۱)=۳$ و $g'(۱)=۵$ مطلوب است، $(f+g)'(۱)$ و $(۳f+۲g)'(۱)$

۱۲ با استفاده از جدول زیر مشخص کنید که کدام‌یک از دو نمودار داده شده، می‌تواند f' را نمایش دهد.



الف



ب

x	۰	۰/۵	۱	۱/۵	۲	۲/۵	۳	۳/۵	۴
$f(x)$	۱۰	۵۵	۹۸	۱۳۹	۱۷۷	۲۱۰	۲۳۷	۲۵۷	۲۶۸

۱۳ مشتق توابع داده شده را بیابید.

الف) $f(x)=(۳x^۲-۴)(۲x-۵)^۳$

پ) $f(x)=(\sqrt{۳x+۲})(x^۳+۱)$

ب) $f(x)=\dfrac{x^۲-۳x+۱}{-۳x+۲}$

ت) $f(x)=\dfrac{۹x-۲}{\sqrt{x}}$

۱۴ مشتق توابع مثلثاتی زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\sin^۳x+\cos^۲x$

پ) $f(x)=\mathrm{tg}^۲x-۲\cos x$

ب) $f(x)=\dfrac{۱-\sin x}{۱+\sin x}$

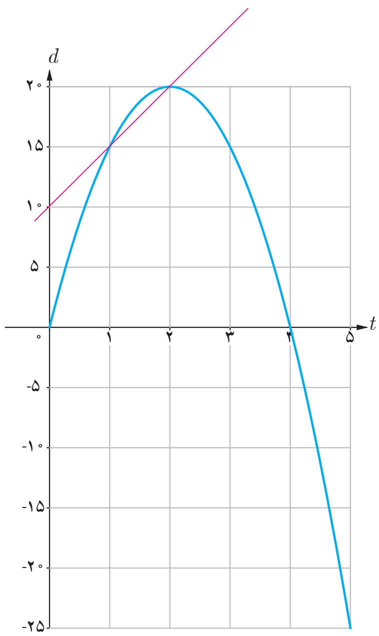
ت) $f(x)=\sin x\,\cos۲x$

درس ۳

آهنگ تغییر متوسط و آهنگ تغییر لحظه‌ای

با مفهوم سرعت متوسط در فیزیک آشنا شده‌اید. اگر اتومبیلی در امتداد یک خط راست مسافت ۲۸۰ کیلومتر را در طی ۴ ساعت طی کند سرعت متوسط آن در طی این زمان $۷۰ = \frac{۲۸۰}{۴}$ کیلومتر بر ساعت است. با این حال می‌دانید که ممکن است اتومبیل در لحظات مختلف سرعت‌های متفاوتی داشته باشد. همچنین می‌دانید که سرعت متوسط روی یک بازه زمانی خیلی کوچک به سرعت لحظه‌ای نزدیک است. اگر نمودار مکان ــ زمان در مورد حرکت یک اتومبیل را داشته باشیم، سرعت متوسط اتومبیل بین هر دو لحظه دلخواه، برابر شیب خطی است که نمودار مکان ــ زمان را در آن دو لحظه قطع می‌کند.

همچنین سرعت لحظه‌ای در هر لحظه دلخواه t، برابر شیب خط مماس بر نمودار در آن لحظه تعریف شد. با آنچه که در درس‌های گذشته ملاحظه کردید، می‌توان گفت که سرعت در لحظه t همان مقدار مشتق تابع (مکان ــ زمان) در لحظه t است. مفهوم مشتق را در بسیاری از پدیده‌های دیگر نیز می‌توان مشاهده کرد. ابتدا در مورد سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای به ذکر مثالی خواهیم پرداخت.



مثال : خودرویی در امتداد یک خط راست طبق معادله $d(t)=-۵t^۲+۲۰t$ حرکت می‌کند. $۰ \leq t \leq ۵$ با در نظر گرفتن نمودار مکان ــ زمان :

الف) سرعت متوسط خودرو را در بازه‌های زمانی [۱,۲]، [۱,۱/۵] و [۱,۱/۴] به‌دست آورید.

ب) اگر به همین ترتیب بازه‌های کوچک‌تری مانند [۱,۱/۳] و [۱,۱/۲] و . . . اختیار کنیم، سرعت متوسط در این بازه‌ها به چه چیزی نزدیک می‌شود؟

پ) سرعت لحظه‌ای را با استفاده از مشتق تابع d در $t=۱$ به‌دست آورید.

ت) سرعت لحظه‌ای در $t=۲$ و $t=۳$ چقدر است؟

حل :

الف)

$$\text{سرعت متوسط در بازه } [۱,۲] = \frac{d(۲)-d(۱)}{۲-۱} = \frac{۲۰-۱۵}{۱} = ۵\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\text{سرعت متوسط در بازه } [۱,۱/۵] = \frac{d(۱/۵)-d(۱)}{۱/۵-۱} = \frac{۱۵}{۲} = ۷/۵\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\text{سرعت متوسط در بازه } [۱,۱/۴] = \frac{d(۱/۴)-d(۱)}{۱/۴-۱} = \frac{۱۸/۲-۱۵}{۰/۴} = \frac{۳/۲}{۰/۴} = ۸\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

ب) اگر به همین ترتیب بازه‌های کوچک‌تری اختیار کنیم، سرعت متوسط به سرعت لحظه‌ای نزدیک می‌شود.

پ) $d'(t)=-۱۰t+۲۰\ ,\ d'(۱)=۱۰$

ت) $d'(۲)=۰\ ,\ d'(۳)=-۱۰$

سرعت در لحظه $t=۲$، صفر است و مماس بر منحنی در این نقطه موازی محور xهاست و خودرو ساکن است. مقدار سرعت در لحظه‌های $t=۱$ و $t=۳$ برابر است ولی علامت منفی در مورد $f'(۲)$ نشان می‌دهد که جهت حرکت در $t=۳$ برخلاف جهت حرکت در $t=۱$ است.

به‌جز مفهوم سرعت در مطالعه، پدیده‌های زیاد دیگری که در قالب یک تابع نمایش داده می‌شوند با موضوع نسبت تغییر متغیر وابسته به متغیر مستقل مواجه می‌شویم. نسبت تغییرات دما به تغییرات زمان و جمعیت نسبت به زمان نمونه‌های دیگری از تغییرات هستند. به‌طور کلی آهنگ تغییر متوسط یک تابع را در بازه‌ای مانند $[a\ ,\ a+h]$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم :

$$\text{آهنگ تغییر متوسط تابع } f \text{ در بازه } [a\ ,\ a+h] = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

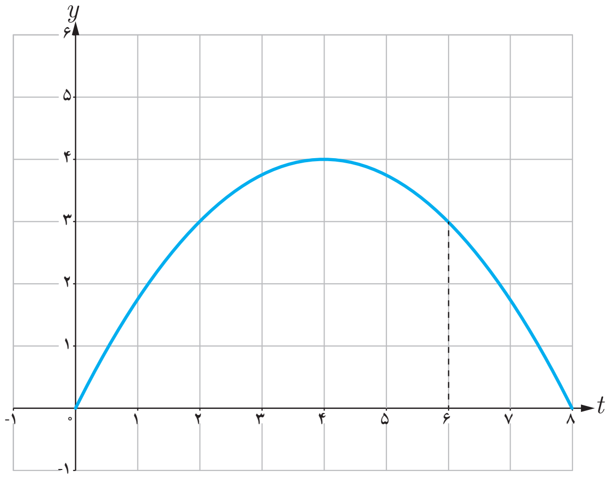
همچنین آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع } f \text{ در نقطه } x=a = \lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

آهنگ تغییر متوسط با شیب خط قاطع و آهنگ تغییر لحظه‌ای با مفهوم مشتق در آن نقطه متناظراند.

کار در کلاس

۱ نمودار زیر موقعیت یک ذره را در لحظه t نمایش می‌دهد. مقادیر زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید :



A سرعت متوسط بین $t=۱$ و $t=۳$

B سرعت متوسط بین $t=۵$ و $t=۶$

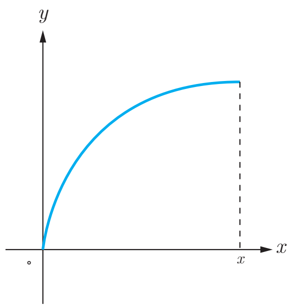
C سرعت لحظه‌ای در $t=۱$

D سرعت لحظه‌ای در $t=۳$

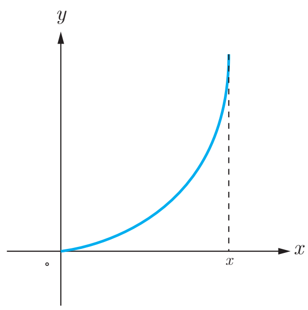
E سرعت لحظه‌ای در $t=۵$

F سرعت لحظه‌ای در $t=۶$

۲ کدام‌یک از نمودارهای داده شده دارای این خاصیت است :
برای همه مقادیر x، آهنگ تغییر متوسط روی $[۰,x]$ بزرگ‌تر است از آهنگ تغییر لحظه‌ای در x.



(ب)



(الف)

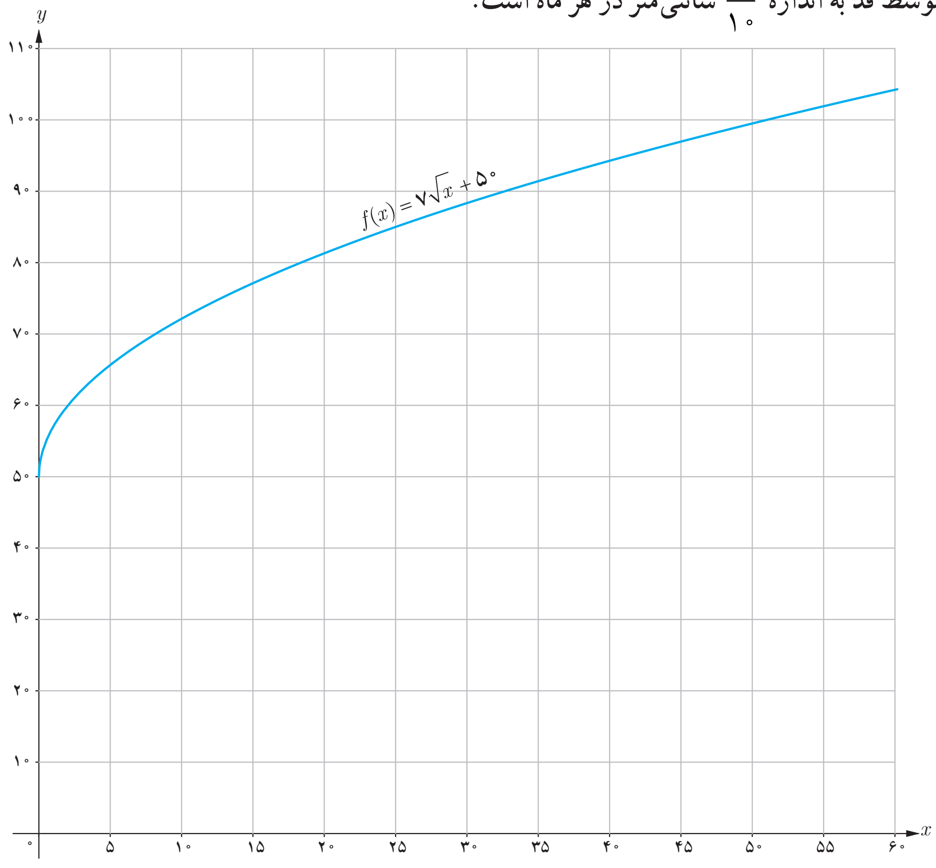
کاربردهایی دیگر از آهنگ تغییر متوسط و آهنگ تغییر لحظه‌ای

آهنگ رشد : همان‌گونه که در حسابان (۱) ملاحظه کردید تابع $f(x)=۷\sqrt{x}+۵۰$ قد متوسط کودکان را برحسب سانتی‌متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد، که در آن x تعداد ماه‌های پس از تولد است.

آهنگ متوسط رشد در بازهٔ زمانی $[۰,۶۰]$ چنین است :

$$\frac{f(۶۰)-f(۰)}{۶۰-۰}=\frac{۷\sqrt{۶۰}+۵۰-۵۰}{۶۰}=۰/۹\ \frac{\text{سانتی‌متر}}{\text{ماه}}$$

یعنی در طی ۵ سال رشد متوسط قد به اندازه $\frac{۹}{۱۰}$ سانتی‌متر در هر ماه است.



کار در کلاس

الف) آهنگ رشد متوسط در بازهٔ زمانی $[۰,۲۵]$ چقدر است؟

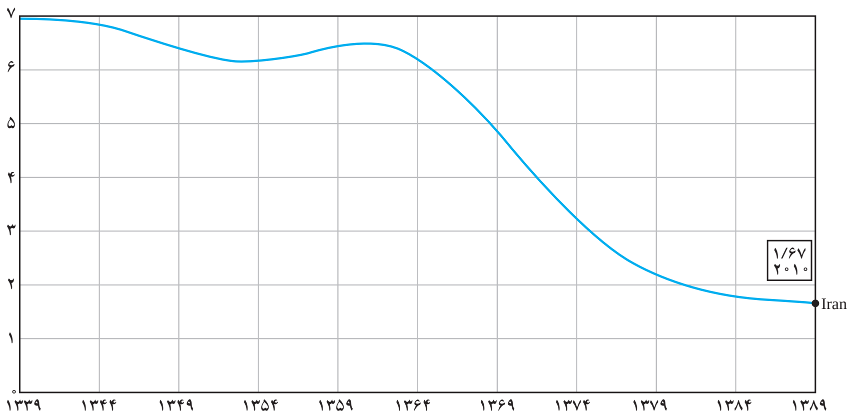
ب) آهنگ تغییر لحظه‌ای قد کودک را در ۲۵ ماهگی و ۴۹ ماهگی، با هم مقایسه کنید. کدام‌یک بیشتر است؟

پ) اگر علی در ۱۶ ماهگی ۸۰ سانتی‌متر قد داشته باشد و قد او در ۳۶ ماهگی ۹۵ سانتی‌متر باشد، آهنگ تغییر متوسط رشد او را با آهنگ تغییر متوسط استاندارد (نمودار بالا) مقایسه کنید.

آهنگ (نرخ) باروری : نمودار زیر روند رو به کاهش نرخ باروری در کشورمان را در طی نیم‌قرن نمایش می‌دهد. آهنگ تغییر متوسط باروری در بازه زمانی [۱۳۳۹,۱۳۸۹] برابر است با :

$$\frac{۱/۶-۷}{۱۳۸۹-۱۳۳۹}=\frac{-۵/۴}{۵۰}=-۰/۱۰۸$$

آهنگ تغییر متوسط باروری در بازه زمانی [۱۳۶۴,۱۳۷۹] را به‌دست آورید. بازه زمانی را مشخص کنید که در آن آهنگ تغییر متوسط باروری مثبت باشد.

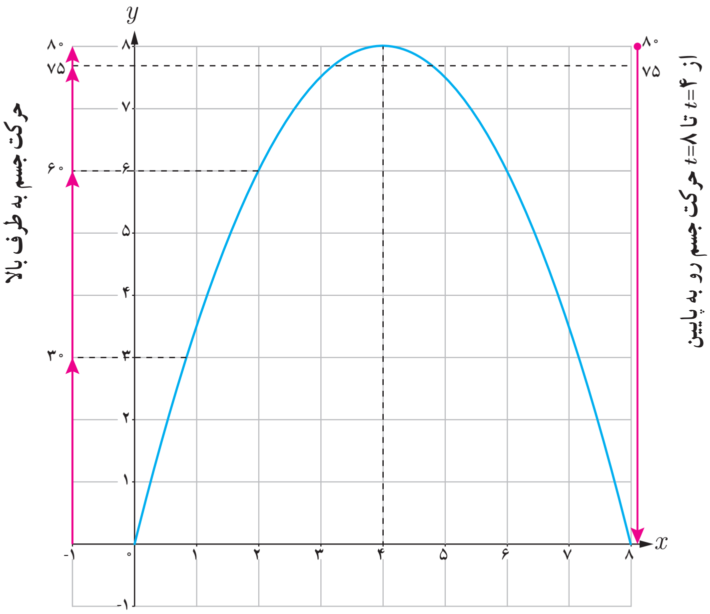


میانگین تعداد فرزندان متولد شده به ازای هر مادر ایرانی

سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای

✤ **مثال :** جسمی را از سطح زمین به‌طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنیم ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t)=-۵t^۲+۴۰t$ به‌دست می‌آید. به‌طور مثال ۲ ثانیه پس از پرتاب این جسم در ارتفاع ۶۰ متری از سطح زمین است.

به هر حال جسم پس از مدتی به زمین برمی‌گردد. نمودار مکان ــ زمان حرکت این جسم در شکل نشان داده شده است.



اگر سرعت متوسط این جسم در بازه‌های زمانی [۰,۲] , [۱,۲] , [۲,۳] و [۳,۴] به ترتیب با v_1 , v_2 , v_3 و v_4 نمایش دهیم داریم :

$$v_1=\frac{h(2)-h(0)}{2-0}=\frac{60}{2}=30\,\text{m/s} \qquad v_2=\frac{h(2)-h(1)}{2-1}=30\,\text{m/s}$$

$$v_3=\frac{h(3)-h(2)}{3-2}=\frac{75-60}{1}=15\,\text{m/s} \qquad v_4=\frac{80-75}{1}=5\,\text{m/s}$$

سرعت لحظه‌ای در زمان‌های $t=1$ ، $t=2$ ، $t=3$ و $t=4$ با استفاده از مشتق تابع h چنین به‌دست می‌آید :

$$f(t)=-5t^2+40t \Longrightarrow f'(t)=-10t+40$$

$$f'(1)=30\,\text{m/s} \quad , \quad f'(2)=20\,\text{m/s} \quad , \quad f'(3)=10\,\text{m/s} \quad , \quad f'(4)=0\,\text{m/s}$$

در $t=4$ جسم به بالاترین ارتفاع خود از سطح زمین (۸۰ متر) می‌رسد و در این لحظه سرعت آن برابر صفر (متر بر ثانیه) می‌شود. سپس جسم شروع به حرکت به طرف زمین می‌کند. سرعت متوسط در بازه [۴,۵] برابر $\frac{h(5)-h(4)}{5-4}=\frac{75-80}{1}=-5\,\text{m/s}$ و سرعت لحظه‌ای در $t=5$ برابر $f'(5)=-10\,\text{m/s}$ است. علامت منفی نشان می‌دهد که حرکت جسم رو به پایین است.

کار در کلاس

با توجه به مثال قبل :

الف) سرعت جسم هنگام پرتاب و هنگام برخورد به زمین را به‌دست آورید.

ب) سرعت متوسط جسم را در بازه زمانی [۵,۸] به‌دست آورید.

پ) لحظاتی را معلوم کنید که سرعت جسم ۳۵ m/s و ۳۵ m/s− است.

تمرین

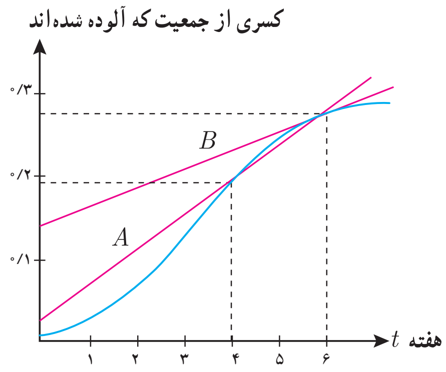
۱ جدول زیر درجه حرارت T (سانتی‌گراد) را در شهری از ساعت ۸ صبح تا ۱۸ عصر در یک روز نشان می‌دهد.

ساعت h	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
درجه حرارت T	۱۱	۱۳	۱۴	۱۷	۱۹	۱۸	۱۷	۱۵	۱۳	۱۰	۹

آهنگ تغییر متوسط درجه حرارت نسبت به زمان را :

الف) از ساعت ۸ تا ساعت ۱۶ به‌دست آورید.

ب) از ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸ به‌دست آورید. پاسخ را چگونه تفسیر می‌کنید.

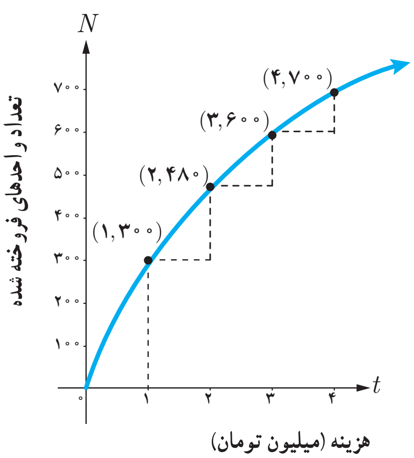


۲ کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله یک ویروس آلوده شده‌اند برحسب زمان (هفته) در نمودار روبه‌رو نشان داده شده است.

الف) شیب‌های خطوط A و B چه چیزهایی را نشان می‌دهند.

ب) گسترش آلودگی در کدام‌یک از زمان‌های $t=۱$ ، $t=۲$ یا $t=۳$ بیشتر است؟

پ) قسمت ب را برای $t=۴$ ، $t=۵$ و $t=۶$ بررسی کنید.



۳ نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا (N) پس از صرف t میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است.

الف) آهنگ تغییر N برحسب t را وقتی t از ۰ تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳ و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند را به‌دست آورید.

ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات وقتی که مقادیر t افزایش می‌یابند، در حال کاهش است؟

۴ معادله حرکت متحرکی به‌صورت $f(t)=t^2-t+10$ برحسب متر در بازه زمانی $[0,5]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $[0,5]$ با هم برابرند.

۵ توپی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود. $f(t)$ نشان‌دهنده فاصله توپ از سطح زمین در زمان t است. برخی از مقادیر $f(t)$ در جدول زیر نمایش داده شده است.

t / ثانیه s	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
$f(t)$ / متر m	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

بر اساس جدول کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان ۰/۴ ثانیه، است نشان دهد؟

الف) ۱/۲۳m/s　　ب) ۱۴/۹۱m/s

ج) ۱۱/۵m/s　　د) ۱۶۰۳m/s

۶ با توجه به مقادیر داده شده برای تابع f در جدول زیر، f' را برای نقاط داده شده تخمین بزنید. به‌طور مثال $f'(0)\approx -6$. بقیه جدول را کامل کنید.

x	۰	۵	۱۰	۱۵	۳۰
$f(x)$	۱۰۰	۷۰	۵۵	۴۶	۴۰
مقدار تقریبی $f'(x)$	-6				

۷ از سه دانش‌آموز خواسته شد که با استفاده از جدول زیر مقداری تقریبی برای $f'(4)$ ارائه کنند. راه‌حل‌های سه دانش‌آموز در ادامه داده شده‌اند.

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$f(x)$	۴/۲	۴/۱	۴/۲	۴/۵	۵	۵/۷

دانش‌آموز اول: $f'(4)\approx \dfrac{f(5)-f(4)}{5-4}=0/5$

دانش‌آموز دوم: $f'(4)\approx \dfrac{f(4)-f(3)}{4-3}=0/3$

دانش‌آموز سوم: $f'(4)\approx \dfrac{0/5+0/3}{2}=0/4$

الف) نمودار f را رسم کنید و نشان دهید که این سه مقدار چگونه روی نمودار مشخص می‌شوند.

ب) از نظر شما کدام پاسخ صحیح‌تر است؟

۸ کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام‌یک نادرست است :

الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازه $[\circ,\text{۱}]$ همیشه کمتر از شیب آن منحنی در نقطه صفر است.

ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن هم، همواره صعودی است.

پ) نمی‌توان تابعی را یافت که برای آن هم $f'(a)=\circ$ و هم $f(a)=\circ$

۹ یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+\text{۲}t^{\text{۳}}$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $\text{۳}\leq t\leq\text{۴}$ چند گرم افزایش می‌یابد؟

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=\text{۳}$ چقدر است؟

۱۰ گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظهٔ $t=\circ$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V=\text{۴}\circ(\text{۱}-\frac{t}{\text{۱}\circ\circ})^{\text{۲}}$ به‌دست آید :

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[\circ,\text{۱}]$ چقدر است؟

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[\circ,\text{۱}\circ\circ]$ می‌شود؟

کاربردهای مشتق

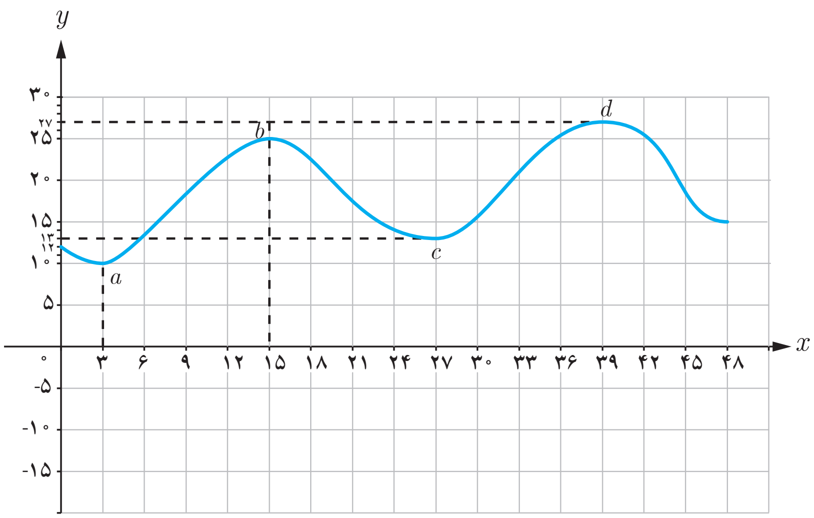
فصل ۵

درس ۱

اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

https://t.me/Nader_belalzadeh

نمودار زیر، نمودار تابع تغییرات دمای هوای یک شهر در دو شبانه‌روز متوالی است. اگر x زمان و y دما باشد؛ بیشترین و کمترین دما در این ۴۸ ساعت در چه زمان‌هایی بوده است و مقدار آنها چند است؟



نقاط b و d به گونه‌ای هستند که مقدار تابع در آنها نسبت به مقادیر تابع در نقاط اطراف آنها (نقاط یک همسایگی حول آنها) بیشتر است، بدین خاطر اصطلاحاً گفته می‌شود تابع در این نقاط «ماکزیمم نسبی» دارد.
نقاط a و c به‌گونه‌ای هستند که مقدار تابع در آنها نسبت به مقادیر تابع در نقاط اطراف آنها کمتر است، لذا اصطلاحاً گفته می‌شود تابع در این نقاط «مینیمم نسبی» دارد. به‌طور دقیق‌تر می‌توان گفت :

تعریف :

اگر بازه‌ای مانند $I \subseteq D_f$ شامل نقطهٔ c وجود داشته باشد که

الف) به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \leq f(c)$، در این صورت $f(c)$ را یک ماکزیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

ب) به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \geq f(c)$، در این صورت $f(c)$ را یک مینیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

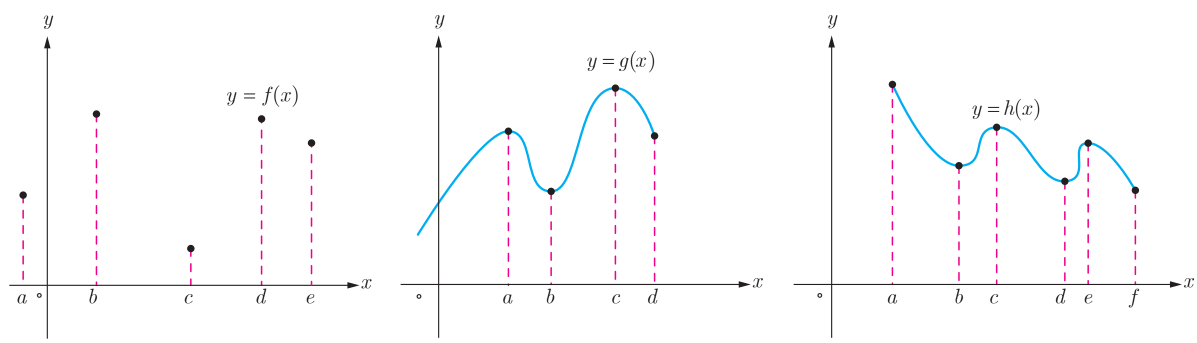
دقت کنید که در نمودار، مقادیر ماکزیمم نسبی برابر ۲۵ و ۲۷ هستند و نقاط ماکزیمم نسبی نقاط (۲۵ و ۱۵) و (۲۷ و ۳۹) هستند و یا به عبارتی مقادیر ماکزیمم‌های نسبی در نقاطی به طول ۱۵ $=x$ و ۳۹ $=x$ اتفاق افتاده‌اند. مشابه همین مطلب را برای مینیمم‌های نسبی این تابع بیان نمایید.

در بسیاری از مسائل فقط بیشترین و کمترین مقدار یک تابع در یک بازه اهمیت دارد. به بزرگ‌ترین مقدار تابع f در بازهٔ I «ماکزیمم مطلق» این تابع در این بازه می‌گوییم. همچنین به کوچک‌ترین مقدار تابع f در بازهٔ I «مینیمم مطلق» این تابع در این بازه می‌گوییم. بنابراین نقاط ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f در بازهٔ I به ترتیب «بالاترین» و «پایین‌ترین» نقطهٔ نمودار تابع در آن بازه هستند و زمانی که می‌گوییم ماکزیمم مطلق تابع f در نقطهٔ $x=a$ (منظور نقطه‌ای از تابع به طول a $x=a$ است) اتفاق افتاده است یعنی $f(a)$ مقدار ماکزیمم مطلق و $(a\ ,\ f(a))$ نقطهٔ ماکزیمم مطلق تابع بر بازهٔ موردنظر است. به عبارتی برای هر $x\in I$ داریم $f(x)\leq f(a)$. همچنین وقتی می‌گوییم مینیمم مطلق تابع f در نقطهٔ $x=a$ اتفاق افتاده است یعنی $f(a)$ مقدار مینیمم مطلق و $(a\ ,\ f(a))$ نقطهٔ مینیمم مطلق تابع بر بازهٔ مورد نظر است.

توجه : گوییم تابع f در نقطهٔ $x=c$ **اکسترمم نسبی** دارد هرگاه در این نقطه ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی داشته باشد و اگر در نقطهٔ $x=c$ ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق داشته باشد می‌گوییم در آن نقطه **اکسترمم مطلق** دارد.

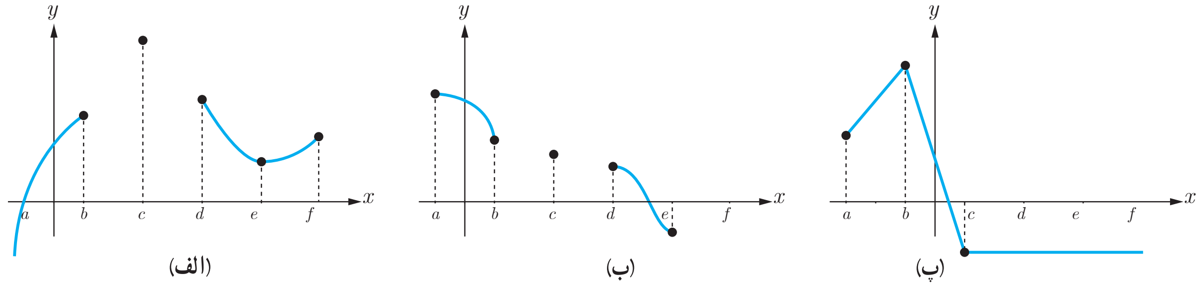
کار در کلاس

۱ در هر یک از نمودارهای زیر مقدار ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق و همچنین طول نقاط ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را مشخص نمایید.

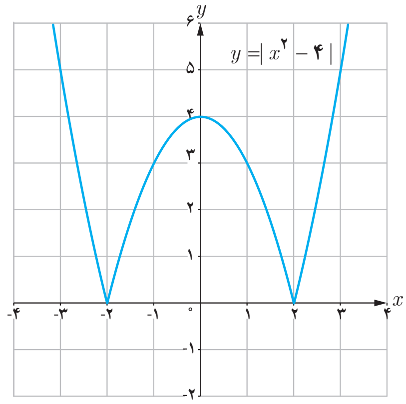


(الف) (ب) (پ)

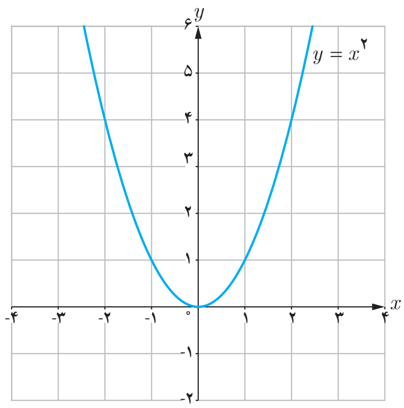
۲ دقت کنید که با توجه به تعریف، نقطهٔ ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی به‌گونه‌ای است که تابع در یک همسایگی اطراف آن تعریف شده است اما نقطهٔ ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق لازم نیست حتماً در چنین شرطی صدق کند. حال با توجه به این مطلب در هر نمودار زیر، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و ماکزیمم و مینیمم مطلق را مشخص نمایید.



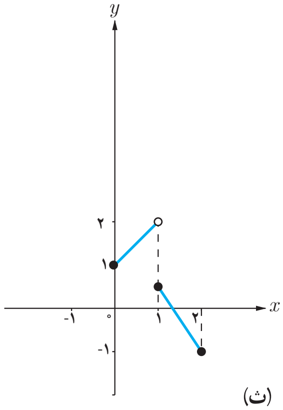
۳ در هر یک از نمودارهای زیر ابتدا مقادیر و طول نقاط اکسترمم‌های نسبی تابع را و سپس اکسترمم‌های مطلق را مشخص نمایید.

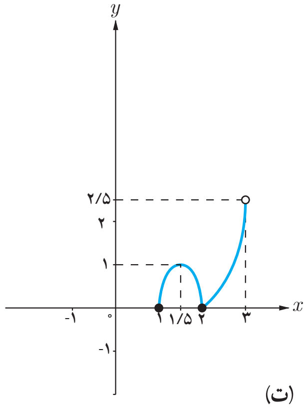


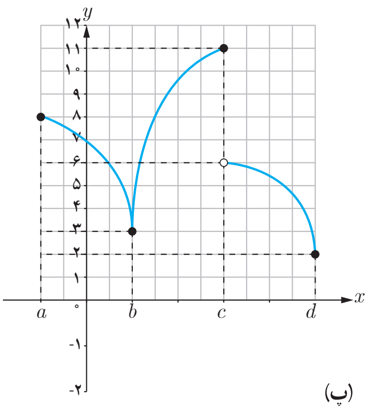
(ب)



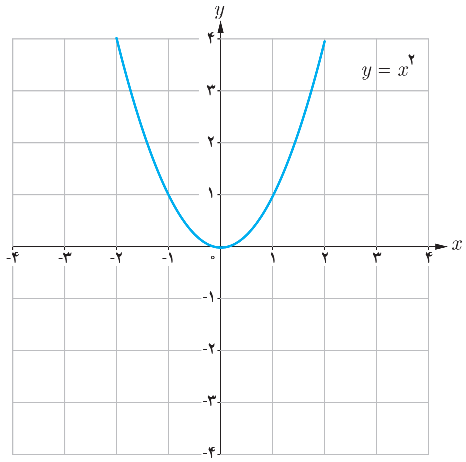
(الف)


(ث)


(ت)


(پ)

۴ نمودار یک تابع را رسم کنید که در (۴ , ۲) ماکزیمم نسبی و در (۲ , ۴) مینیمم نسبی دارد.



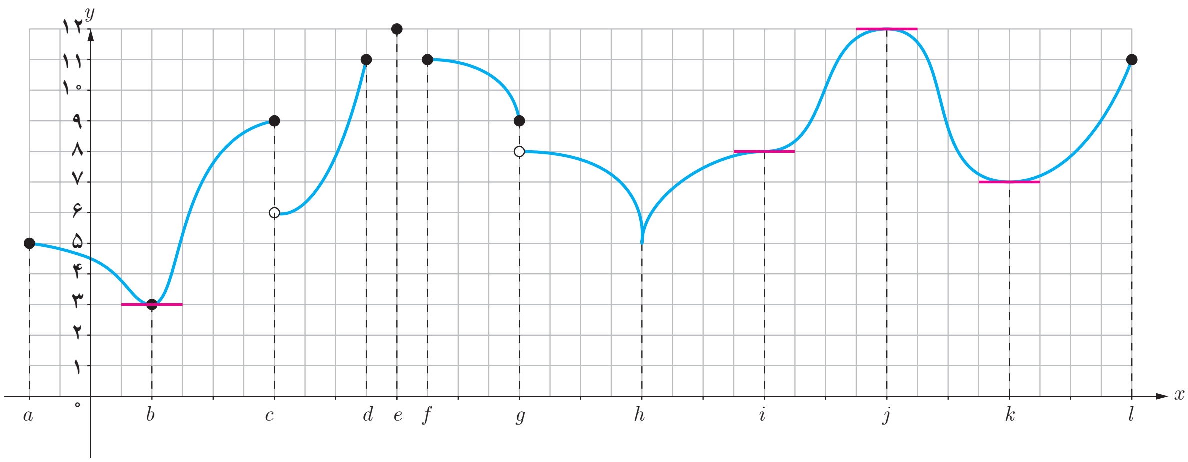
۵ تابع $f(x) = x^2$ را در نظر بگیرید.

الف) مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f را در بازه‌های $[0, 1]$ و $(0, 1)$ بررسی کنید.

ب) اکسترمم‌های مطلق تابع f را بر $\mathbb{R}$ مشخص نمایید.

فعالیت

۱ در نمودار زیر تمام جاهایی که مماس افقی وجود دارد؛ یعنی تمام جاهایی که مشتق در آنها وجود دارد و برابر صفر است مشخص شده‌اند. به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف) تمام نقاط اکسترمم نسبی را مشخص نمایید.

ب) تمام نقاطی که مشتق در آنها وجود ندارد را مشخص نمایید.

پ) تمام نقاطی که مشتق برابر صفر است را بنویسید.

ت) آیا در همهٔ نقاط اکسترمم نسبی مشتق وجود دارد؟

ث) در اکسترمم‌های نسبی که مشتق در آنها وجود دارد، مقدار این مشتق چند است؟

ج) آیا امکان دارد در نقطه‌ای مشتق برابر صفر باشد ولی آن نقطه اکسترمم نسبی نباشد؟

چ) آیا امکان دارد در نقطه‌ای مشتق وجود نداشته باشد ولی آن نقطه اکسترمم مطلق باشد؟

۲ سعی کنید نمودارهای دیگری رسم کنید که در آنها نقاط اکسترممی باشد که مشتق در این نقاط موجود باشد (خط مماس بر منحنی در نقاط اکسترمم وجود داشته باشد). مقدار مشتق در این نقاط اکسترمم چند است؟

۳ با توجه به آنچه در قسمت‌های ۱ و ۲ دیدید، کدام‌یک از موارد زیر درست است؟

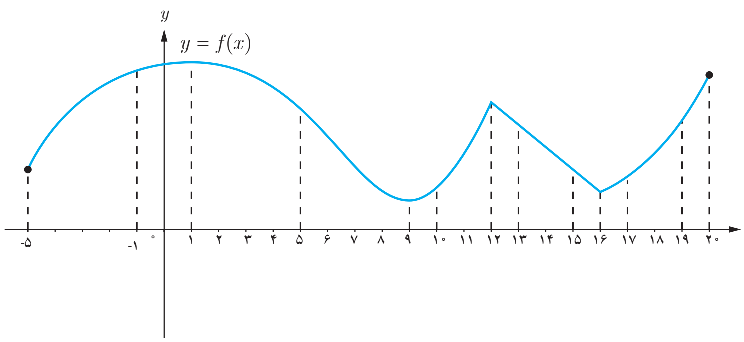
الف) $x = c$ طول یک نقطهٔ اکسترمم است و $f'(c)$ موجود است $\Leftarrow$ $f'(\text{c}) = \circ$

ب) $x = c$ طول یک نقطهٔ اکسترمم است $\Rightarrow$ $f'(\text{c}) = \circ$

پ) $x = c$ طول یک نقطهٔ اکسترمم است $\Rightarrow$ $f'(\text{c})$ وجود ندارد.

فعالیت

۱ شکل روبه‌رو نمودار یک تابع پیوسته را نشان می‌دهد.



الف) وجود ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را برای تابع f در بازه‌های بستهٔ زیر بررسی کنید.

$[-۱ , ۰]$, $[۵ , ۱۰]$, $[۱۳ , ۱۵]$, $[۱۰ , ۱۳]$, $[۱۶ , ۲۰]$

ب) وجود هر یک از مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را برای تابع f در بازه‌های باز زیر بررسی کنید.

$(-۱ , ۰)$, $(۵ , ۱۰)$, $(۱۳ , ۱۵)$, $(۱۰ , ۱۳)$, $(۱۶ , ۲۰)$

۲ با توجه به آنچه در قسمت ۱ مشاهده کردید کدام‌یک از موارد زیر نمی‌تواند درست باشد؟

الف) هر تابع پیوسته بر یک مجموعهٔ بسته دارای اکسترمم‌های مطلق است.

ب) هر تابع پیوسته بر یک مجموعهٔ باز دارای اکسترمم‌های مطلق است.

با توجه به آنچه در فعالیت قبل مشاهده کردید، قضیهٔ زیر را بدون اثبات می‌پذیریم.

قضیه : اگر تابع f در بازهٔ بستهٔ $[a , b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه این تابع در این بازه هم مقدار ماکزیمم مطلق و هم مقدار مینیمم مطلق دارد.

با توجه به آنچه تا به حال ملاحظه کردیم، اکسترمم‌های مطلق تابع یا در «نقاط ابتدا و انتهای بازه» هستند، یا در اکسترمم‌های نسبی تابع و یا در نقاط دیگری که تابع در آنها مشتق‌پذیر نیست. از طرفی دیدیم که در اکسترمم‌های نسبی یا «مشتق تابع وجود ندارد» و یا «مشتق وجود دارد و برابر صفر است». بنابراین اکسترمم‌های مطلق تابع را باید در بین نقاطی بررسی کنیم که یکی از سه ویژگی زیر را داشته باشند :

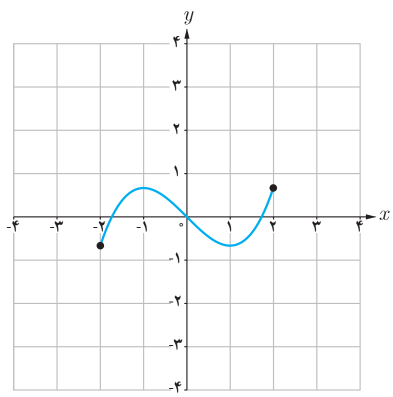
۱ نقاطی که مشتقِ تابع در آنها وجود ندارد.

۲ نقاطی که مشتق در آنها برابر صفر است.

۳ نقاط ابتدایی و انتهایی بازهٔ مورد نظر.

مجموعهٔ حاصل از اجتماع نقاط دو دستهٔ (۱) و (۲) را «**نقاط بحرانی**» می‌نامیم و برای یافتن نقاط اکسترمم مطلق ابتدا این نقاط بحرانی را مشخص می‌نماییم. در این صورت از بین تمام نقاط بحرانی و نقاط انتهایی بازه، نقطه یا نقاطی که بیشترین مقدار تابع در آنها اتفاق می‌افتد **نقاط ماکزیمم مطلق** تابع و مقدار تابع در این نقاط **مقدار ماکزیمم مطلق** تابع است. همچنین در بین نقاط مذکور نقطه یا نقاطی که کمترین مقدار تابع در آنها اتفاق می‌افتد **نقاط مینیمم مطلق** تابع و مقدار تابع در این نقاط **مقدار مینیمم مطلق** تابع است.

مثال : اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x)=\frac{۱}{۳}x^۳-x$ را در بازهٔ $[-۲\,,\,۲]$ بیابید.



حل : بنابر آنچه گفته شد باید نقاط بحرانی، یعنی نقاطی که مشتق در آنها وجود ندارد یا برابر صفر است را مشخص نماییم.

بنابراین باید در بازهٔ $(-۲\,,\,۲)$ به دنبال نقاطی باشیم که تابع در آنها مشتق نداشته باشد و یا مشتق در آنها برابر صفر باشد. اما f در تمام بازهٔ $(-۲\,,\,۲)$ مشتق‌پذیر است و داریم $f'(x)=x^۲-۱$ و مقدار f' در $x=\pm۱$ برابر صفر می‌شود یعنی داریم $f'(۱)=۰$ و $f'(-۱)=۰$.

بنابراین $x=\pm۱$ طول نقاط بحرانی و $x=\pm۲$ طول نقاط انتهایی بازه هستند و از آنجا که داریم :

$$f(۲)=\frac{۲}{۳} \qquad f(۱)=-\frac{۲}{۳} \qquad f(-۱)=\frac{۲}{۳} \qquad f(-۲)=-\frac{۲}{۳}$$

لذا مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع بر این بازه به ترتیب برابر $\frac{۲}{۳}$ و $-\frac{۲}{۳}$ و نقاط ماکزیمم نقاط به طول $x=-۱$ و $x=۲$ و نقاط مینیمم نقاط به طول $x=۱$ و $x=-۲$ است.

مثال : به مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f با ضابطه $f(x)=|x^{۲}-۱|$ را روی بازه $[-۲\,,\,۲]$ پیدا کنید.

حل : نقاط $x=\pm ۲$ نقاط انتهایی بازه‌اند. برای یافتن نقاط اکسترمم مطلق، باید به دنبال نقاط بحرانی باشیم، یعنی نقاطی مانند c که برای آنها $f'(c)=۰$ یا $f'(c)$ وجود نداشته باشد. لذا باید مشتق‌پذیری تابع f در نقاط بازه بررسی شود. اما داریم :

$$f(x)=|x^{۲}-۱|=\begin{cases} x^{۲}-۱ & x\le -۱ \ \text{یا}\ ۱\le x \\ ۱-x^{۲} & -۱\le x\le ۱ \end{cases}$$

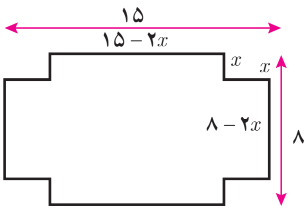
و لذا

$$f'(x)=\begin{cases} ۲x & x<-۱ \ \text{یا}\ ۱<x \\ -۲x & -۱<x<۱ \end{cases}$$

و $f'_{+}(۱)=۲$, $f'_{-}(۱)=-۲$, $f'_{+}(-۱)=۲$, $f'_{-}(-۱)=-۲$

بنابراین تابع f در نقاط $x=\pm ۱$ مشتق‌پذیر نیست و از طرفی f' تنها در نقطهٔ $x=۰$ مقدار صفر می‌گیرد. لذا نقاط $x=۰$ و $x=\pm ۱$ نقاط بحرانی این تابع‌اند و با بررسی مقدار تابع در این نقاط و نقاط انتهایی بازه، به سادگی مشخص می‌شود که مینیمم مطلق تابع در دو نقطهٔ $x=\pm ۱$ است و مقدار آن برابر صفر است و ماکزیمم مطلق در نقاط $x=\pm ۲$ و مقدار آن برابر ۳ است.

مثال : یک سازنده قوطی حلبی، با بریدن مربع‌های همنهشت از چهار گوشه ورق‌های حلبی به ابعاد ۸ اینچ[1] و ۱۵ اینچ و بالا بردن چهار طرف آن، قوطی‌های سر باز می‌سازد. اگر بخواهیم حجم قوطی‌های ساخته شده بیشترین مقدار ممکن باشد، مطلوب است محاسبه طول ضلع مربع‌هایی که باید بریده شود.



حل : فرض کنید طول ضلع مربعی که از گوشه‌های مستطیل مفروض برحسب اینچ بریده می‌شود x باشد. پس

$$\text{طول قوطی مورد نظر} = ۱۵-۲x \qquad ۰\le x\le \frac{۱۵}{۲}$$

$$\text{عرض قوطی} = ۸-۲x \qquad ۰\le x\le ۴$$

پس با توجه به این مفروضات داریم :

$$V(x)=x(۱۵-۲x)(۸-۲x)=۴x^{۳}-۴۶x^{۲}+۱۲۰x \ , \quad ۰\le x\le ۴$$

چون V روی $[۰\,,\,۴]$ پیوسته است، پس دارای اکسترمم‌های مطلق است و داریم :

$$V'(x)=۱۲x^{۲}-۹۲x+۱۲۰=۰$$

$$(۳x-۵)(x-۶)=۰ \Rightarrow x=\frac{۵}{۳} \quad \text{یا} \quad x=۶$$

۱ــ هر اینچ تقریباً معادل ۲/۵۴ سانتی‌متر است.

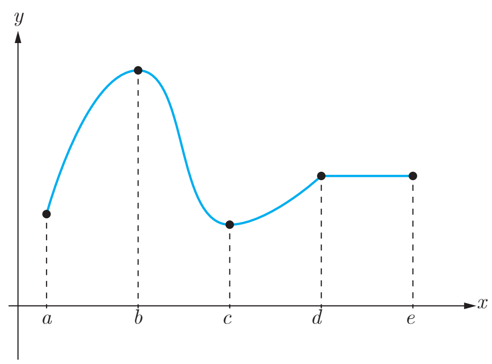
اما $x = ۶$ در بازه مورد نظر قرار ندارد، پس قابل قبول نیست و $x = \frac{۵}{۳}$ تنها نقطه بحرانی تابع است. از طرفی $V(۰) = ۰$ ، $V(۴) = ۰$ و $V(\frac{۵}{۳}) > ۰$ نشان می‌دهد که ماکسیمم مطلق تابع در $x = \frac{۵}{۳}$ حاصل می‌شود و لذا طول ضلع مربع‌های مورد نظر باید $\frac{۵}{۳}$ اینچ باشد.

تشخیص صعودی و نزولی بودن یک تابع

در فصل اوّل با مفهوم صعودی یا نزولی بودن یک تابع بر یک بازه آشنا شدیم. همچنین در فصل قبل با مفهوم مشتق آشنا شدیم و دیدیم که مقدار مشتق یک تابع در یک نقطه برابر است با شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه. از طرفی برای یک تابع مانند f با تابع f' آشنا شدیم. اکنون خواهیم دید که با بررسی f' می‌توان ویژگی‌هایی از تابع f و نمودار آن از جمله صعودی و نزولی بودن تابع را مشخص نمود.

فعالیت

۱ نمودار تابع f در شکل روبه‌رو داده شده است.



الف) با رسم مماس‌هایی در نقاط مختلف نمودار f تعیین کنید در چه بازه‌هایی شیب مماس‌ها مثبت و در چه بازه‌هایی شیب مماس‌ها منفی و در چه بازه‌هایی شیب مماس‌ها برابر صفر است.

ب) تعیین کنید در چه بازه‌هایی مشتق f مثبت و در چه بازه‌هایی مشتق f منفی و در چه بازه‌هایی f' برابر صفر است.

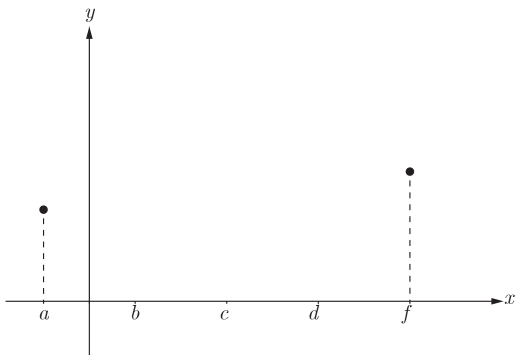
پ) تعیین کنید در چه بازه‌هایی تابع f صعودی اکید و در چه بازه‌هایی نزولی اکید و در چه بازه‌هایی مقدار تابع f ثابت است.

۲ دو نقطه از نمودار یک تابع در شکل روبه‌رو داده شده‌اند.
نمودار این تابع را در بازهٔ $[a, f]$ به گونه‌ای بکشید که دارای همهٔ ویژگی‌های زیر باشد :

ــ تابع f در بازهٔ (a, f) مشتق‌پذیر باشد.

ــ مقدار مشتق تابع در بازه‌های (a, b) و (b, c) و (c, d) و (d, f) به ترتیب منفی، مثبت، صفر و منفی باشد.

ــ تعیین کنید تابع f در کدام بازه‌ها صعودی اکید و در کدام بازه‌ها نزولی اکید و در کدام بازه‌ها ثابت است.



با توجه به آنچه گفته شد قضیهٔ زیر را بدون اثبات بیان می‌نماییم.

قضیه :

فرض کنیم تابع f بر بازه $[a, b]$ پیوسته و بر بازه (a, b) مشتق‌پذیر باشد.

در این صورت

الف) اگر به ازای هر x در (a, b)، $f'(x) > 0$، آن‌گاه تابع f بر $[a, b]$ صعودی اکید است.

ب) اگر به ازای هر x در بازه (a, b)، $f'(x) < 0$، آن‌گاه تابع f بر $[a, b]$ نزولی اکید است.

پ) اگر به ازای هر x در بازه (a, b)، $f'(x) = 0$، آن‌گاه تابع f بر $[a, b]$ یک تابع ثابت است.

کار در کلاس

توابع $f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ x & x < 1 \end{cases}$ و $g(x) = x^3$ در تمام $\mathbb{R}$ صعودی اکیدند.

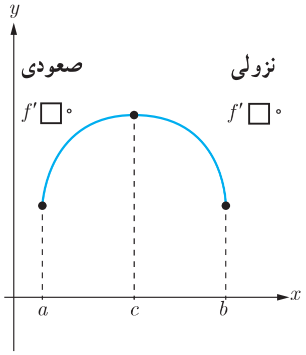
۱ آیا می‌توان گفت هر تابع که در یک بازه صعودی اکید باشد، در آن بازه مشتق‌پذیر هم هست؟

۲ آیا می‌توان گفت هر تابع که در یک بازه صعودی اکید و مشتق‌پذیر باشد، در هر نقطه از آن بازه دارای مشتق مثبت است؟

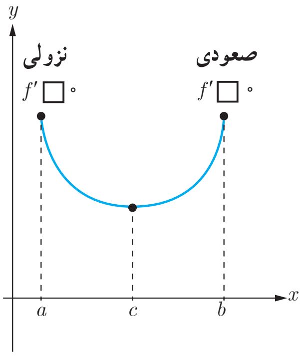
در ادامه محکی برای تعیین نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی ارائه می‌دهیم :

فعالیت

فرض کنیم تابع f بر بازه‌ای شامل نقطهٔ c، مشتق‌پذیر باشد.



۱ اگر نقطهٔ $x = c$ یک اکسترمم نسبی f باشد (یعنی مشتق در آن وجود ندارد یا برابر صفر است) و در بازه‌ای مانند $(a\ ,\ c)$ در سمت چپ آن تابع صعودی و در بازه‌ای مانند $(c\ ,\ b)$ در سمت راست آن تابع نزولی باشد، در این صورت $x = c$ یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است.



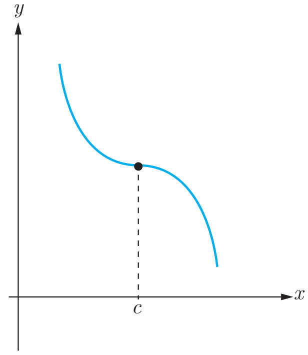
۲ مشابه قسمت (۱) را برای نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f بنویسید.

۳ در شکل‌های زیر نمودار تابع f و نقطهٔ c مشخص شده است و $f'(c) = \circ$.

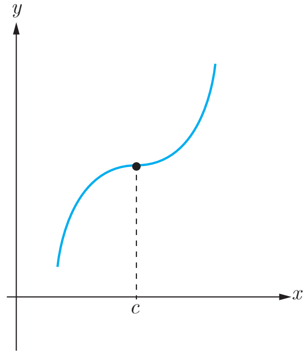
الف) علامت f' را در دو طرف نقطهٔ c در هر دو نمودار بررسی کنید.

ب) در هر یک از نمودارها مشخص کنید آیا c یک نقطهٔ اکسترمم نسبی است؟

(الف)



(ب)



با توجه به آنچه گفته شد می‌توان محک زیر را که به نام آزمون مشتق اوّل معروف است بیان نمود.

آزمون مشتق اوّل

فرض کنیم تابع f بر بازه‌ای مانند I $(I \subseteq D_f)$ پیوسته باشد و $c \in I$ یک نقطهٔ بحرانی تابع f باشد. هرگاه f بر این بازه به جز احتمالاً در نقطهٔ c، مشتق‌پذیر باشد، در این صورت:

الف) اگر به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (a, c)، $f'(x) > 0$ و به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (c, b)، $f'(x) < 0$، در این صورت $f(c)$ یک مقدار ماکزیمم نسبی f است.

ب) اگر به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (a, c)، $f'(x) < 0$، و به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (c, b)، $f'(x) > 0$، آن‌گاه $f(c)$ یک مقدار مینیمم نسبی f است.

پ) اگر f' در نقطهٔ c تغییر علامت ندهد، آن‌گاه $f(c)$ نه مینیمم نسبی و نه ماکزیمم نسبی است.

مثال: اکسترمم‌های نسبی و مطلق تابع $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 6$ را در بازهٔ $[-3, 4]$ به‌دست آورید و مشخص کنید این تابع در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است؟

حل: از آنجا که توابع چندجمله‌ای همواره مشتق‌پذیرند لذا برای مشخص کردن نقاط بحرانی تابع f باید تمام نقاطی که مشتق تابع در آنها صفر می‌شود را به‌دست آوریم.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4 \qquad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2 \quad \text{یا} \quad x = -\frac{2}{3}$$

لذا نقاط بحرانی این تابع نقاط $x = 2$ و $x = -\frac{2}{3}$ است و نقاط $x = -3$ و $x = 4$ هم که نقاط انتهایی بازه هستند و داریم:

$$(-3, -27), \quad \left(-\frac{2}{3}, \frac{202}{27}\right), \quad (2, -2), \quad (4, 22)$$

لذا نقاط $x = 4$ و $x = -3$ به ترتیب نقاط ماکزیمم و مینیمم مطلق و مقادیر آنها به ترتیب ۲۲ و ۲۷- است. حال برای تعیین اکسترمم‌های نسبی و صعودی و نزولی بودن تابع باید مشتق تابع را تعیین علامت کنیم. با توجه به تعیین علامت معادلات درجهٔ دوم داریم:

x		$-\frac{2}{3}$		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

از این جدول مشخص می‌شود که تابع f در بازهٔ $\left(-\frac{۲}{۳}\,,\,۲\right)$ نزولی و در سایر جاها صعودی است. همچنین مشخص می‌شود که نقطهٔ $x=-\frac{۲}{۳}$ یک ماکزیمم نسبی و مقدار آن برابر $\frac{۲۰۲}{۲۷}$ است و نقطهٔ $x=۲$ یک مینیمم نسبی و مقدار آن برابر -۲ است.

می‌توان اطلاعات فوق را در جدول زیر که به آن جدول تغییرات تابع می‌گوییم نمایش داد.

x	-۳		$-\frac{۲}{۳}$		۲		۴
f'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
f	-۲۷	$\nearrow$	$\frac{۲۰۲}{۲۷}$	$\searrow$	-۲	$\nearrow$	۲۲
			ماکزیمم نسبی		مینیمم نسبی		

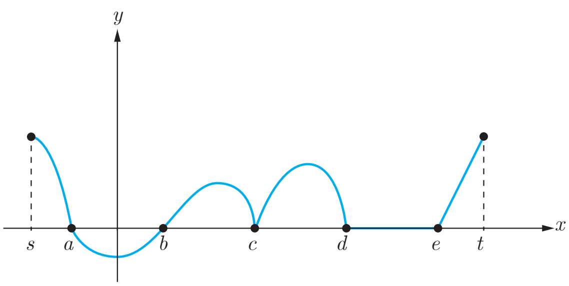
کار در کلاس

نمودار تابع f' در شکل روبه‌رو داده شده است.

الف) صعودی و نزولی بودن تابع f را در $[s\,,\,t]$ بررسی کنید.

ب) نقاط a، b، c، d و e کدام بحرانی، کدام ماکزیمم نسبی و کدام مینیمم نسبی‌اند؟

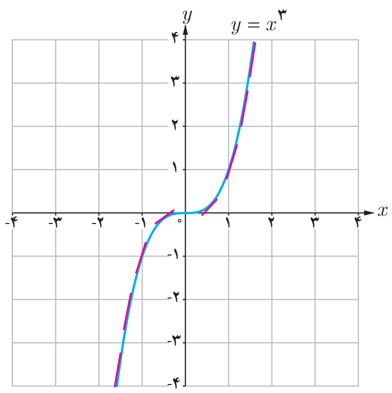
پ) آیا نقاط بازهٔ $(d\,,\,e)$ اکسترمم نسبی هستند؟

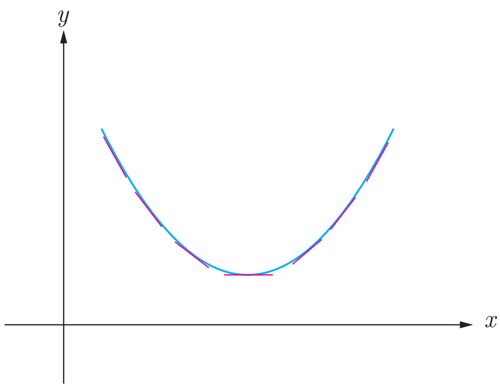


درس ۲

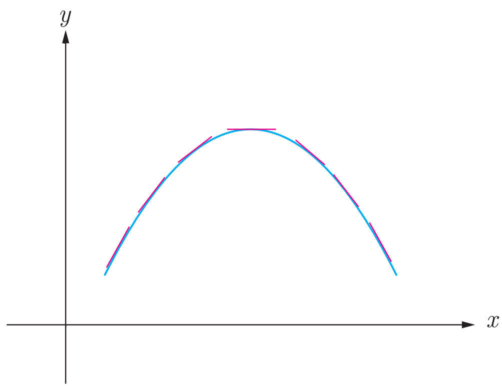
جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطهٔ عطف آن

با تابع $f(x) = x^3$ آشنایی دارید. از آنجا که مشتق این تابع $f'(x) = 3x^2$ در $x = 0$ برابر صفر و در سایر نقاط همواره مثبت است، لذا شیب خطوط مماس بر منحنی این تابع در $x = 0$ برابر صفر و در تمام نقاط دیگر مثبت است و این تابع همواره صعودی است. با این حال اگر خطوط مماس بر این منحنی را به‌صورت پاره‌خط‌هایی کوچک در اطراف نقاط مماس رسم کنید خواهید دید که این پاره‌خط‌ها برای xهای منفی در بالای نمودار و برای xهای مثبت در زیر نمودار واقع‌اند. اصطلاحاً گفته می‌شود که جهت تقعر این تابع در بازهٔ $(-\infty\ ,\ 0)$ به سمت پایین و در بازهٔ $(0\ ,\ +\infty)$ به سمت بالا است. برای درک بهتر مفهوم تقعر منحنی یک تابع به دو شکل زیر توجه کنید.





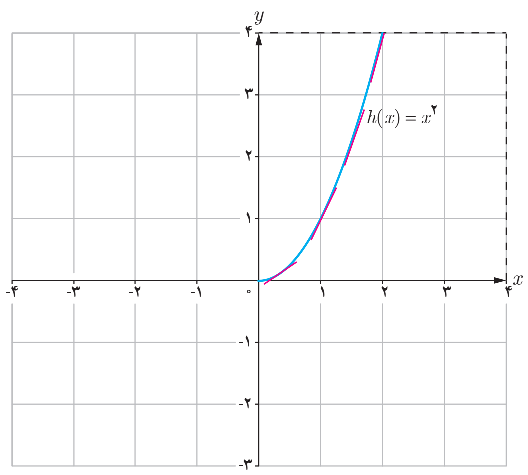
تقعر به سمت بالا است
مماس‌ها در زیر منحنی‌اند.



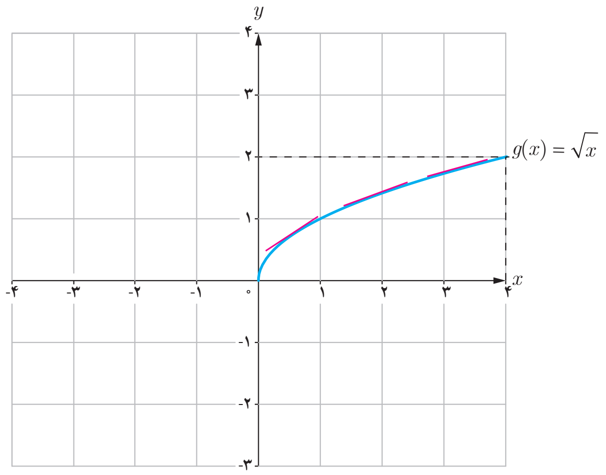
تقعر به سمت پایین است
مماس‌ها در بالای منحنی‌اند.

فعالیت

۱ نمودارهای دو تابع $h(x) = x^2$ و $g(x) = \sqrt{x}$ در بازهٔ $[0 , 1]$ و خطوط مماس بر منحنی‌های آنها در برخی نقاط این بازه رسم شده است.



الف) تقعر رو به بالا است،
مماس‌ها زیر منحنی قرار دارند،
شیب خطوط مماس زیاد می‌شود،
تابع h' صعودی است.



ب) تقعر رو به پایین است،
مماس‌ها بالای منحنی قرار دارند،
شیب خطوط مماس کم می‌شود،
تابع g' نزولی است.

۲ با حرکت از نقطهٔ $x = 0$ به سمت نقطهٔ $x = 1$ شیب خطوط مماس در هر کدام از منحنی‌ها چگونه تغییر می‌کند؟ (کم می‌شود یا زیاد) جهت تقعر منحنی در هر کدام از نمودارها چگونه است؟

۳ جهت تقعر منحنی چه ارتباطی با شیب خطوط مماس دارد؟

۴ تابع $h'(x)$ در بازهٔ $(0 , 1)$ صعودی است یا نزولی؟

۵ تابع $g'(x)$ در بازهٔ $(0 , 1)$ صعودی است یا نزولی؟

۶

الف) در حالت کلی صعودی یا نزولی بودن تابع f چه ارتباطی با علامت تابع f' دارد؟

علامت f' بر بازهٔ I مثبت است $\Leftarrow$ تابع f بر بازهٔ I .... است.

علامت f' بر بازهٔ I منفی است $\Leftarrow$ تابع f بر بازهٔ I .... است.

ب) اگر مشتق تابع f' را با f'' نشان دهیم و به آن مشتق دوم تابع f بگوییم در حالت کلی صعودی یا نزولی بودن تابع f' چه ارتباطی با علامت تابع f'' دارد؟

علامت f'' بر بازهٔ I مثبت است $\Leftarrow$ تابع f' بر بازهٔ I .... است.

علامت f'' بر بازهٔ I منفی است $\Leftarrow$ تابع f' بر بازهٔ I .... است.

۷ با توجه به آنچه گفته شد موارد زیر را کامل کنید :

الف) اگر مقدار f'' در یک بازه مثبت باشد، تابع f' در آن بازه .... است و لذا شیب خطوط مماس بر منحنی در آن بازه .... می‌یابد و تقعر منحنی تابع f در آن بازه روبه .... است.

ب) اگر مقدار f'' در یک بازه منفی باشد، تابع f' در آن بازه .... است و لذا شیب خطوط مماس بر منحنی در آن بازه .... می‌یابد و تقعر منحنی تابع f در آن بازه روبه .... است.

آنچه در فعالیت قبل مورد بررسی قرار گرفت به‌طور خلاصه در قضیهٔ زیر آورده شده است و در این کتاب اثباتِ آن مدنظر نمی‌باشد.

قضیه :

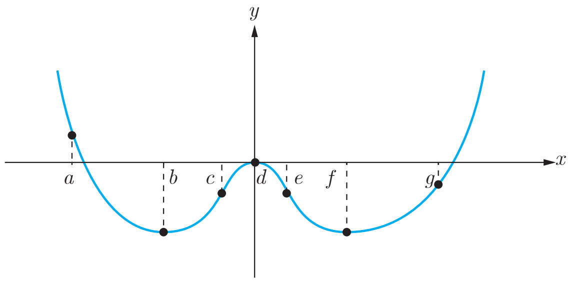
فرض کنیم $f''(x)$ به ازای هر نقطه x از بازه باز I موجود باشد.

الف) اگر به ازای هر x از I، $f''(x) > 0$، آن‌گاه نمودار f روی بازهٔ I تقعر رو به بالا دارد.

ب) اگر به ازای هر x از I، $f''(x) < 0$، آن‌گاه نمودار f روی بازهٔ I تقعر رو به پایین دارد.

پ) اگر به ازای هر x از I، $f''(x) = 0$، آزمون بی‌نتیجه است.

کار در کلاس

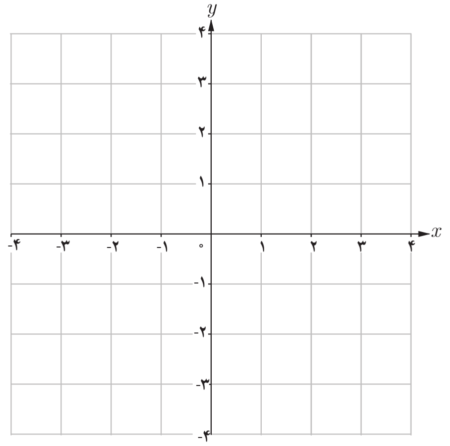


۱ نمودار تابع $y = f(x)$ را در شکل روبه‌رو در نظر بگیرید.

الف) صعودی و نزولی بودن تابع f را بر بازه‌های مختلف بررسی کنید.

ب) صعودی و نزولی بودن تابع f' را بر بازه‌های مختلف بررسی کنید.

پ) جهت تقعر را در نقاط a، d و g مشخص کنید.



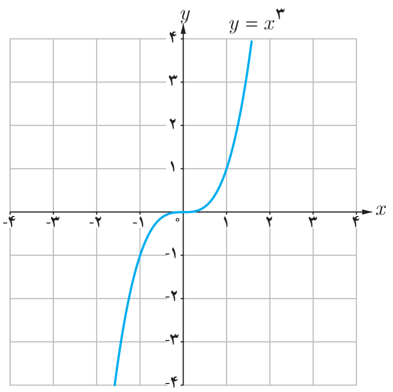
۲ نمودار تابع $y = f(x)$ را با اطلاعات زیر رسم کنید :

الف) $f(0) = f(1) = f(2) = 0$

ب) بر بازهٔ $(-\infty , 1)$، $f''(x) < 0$

و بر بازهٔ $(1 , \infty)$، $f''(x) > 0$.

نقطهٔ عطف نمودار یک تابع

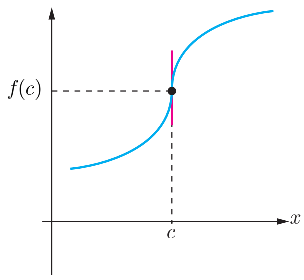


نمودار تابع $f(x) = x^3$ را در نظر بگیرید. دیدیم که جهت تقعر نمودار این تابع در بازهٔ $(-\infty , 0)$ رو به پایین و در بازهٔ $(0 , +\infty)$ رو به بالاست. بنابراین نقطهٔ $x = 0$ نقطه‌ای است که جهت تقعر منحنی در آن عوض می‌شود. از طرفی در $x = 0$ منحنی دارای مماس نیز هست. چنین نقطه‌ای از یک منحنی را نقطهٔ عطف آن منحنی گوییم. به عبارت دیگر :

تعریف : فرض کنیم تابع f در نقطه $x = c$ پیوسته است. در این صورت نقطه $(c , f(c))$ نقطهٔ عطف تابع f است، هرگاه هر دو شرط زیر برقرار باشند :

الف) نمودار f در نقطه $(c , f(c))$ خط مماس داشته باشد.

ب) جهت تقعر f در نقطه $(c , f(c))$ تغییر کند.



خط $x=c$ مماس قائم است.

از شرط (الف) در تعریفِ نقطهٔ عطفِ تابع f نتیجه می‌شود که یا $f'(c)$ موجود است و یا تابع f در نقطهٔ c مماس قائم دارد.

از شرط (ب) نتیجه می‌شود که خط مماس بر نمودار تابع در نقطهٔ $(c\,,\,f(c))$ از نمودار تابع عبور می‌کند.

از آنجا که تقعر تابع در دو طرف نقطهٔ عطف تغییر می‌کند؛ لذا f'' در یک طرف نقطهٔ c مثبت و در طرف دیگر آن منفی است. بنابراین $f''(c)$ نمی‌تواند مقداری به جز صفر داشته باشد؛ یعنی برای اینکه $(c\,,\,f(c))$ یک نقطهٔ عطف منحنی باشد، یا باید $f''(c)$ وجود نداشته باشد و یا اگر وجود دارد باید داشته باشیم $f''(c)=۰$. با این حال شرط $f''(c)=۰$ برای نقطهٔ عطف بودن $x=c$ به تنهایی کافی نیست؛ یعنی می‌توانیم داشته باشیم $f''(c)=۰$ ولی $x=c$ یک نقطهٔ عطف تابع نباشد. به‌طور مثال تابع $f(x)=x^۴$ را بررسی کنید. داریم :

$$f'(x)=۴x^۳ \qquad , \qquad f''(x)=۱۲x^۲$$

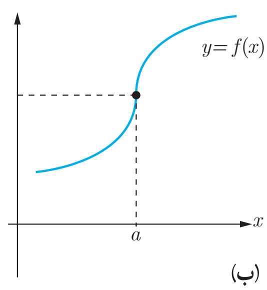
با اینکه $f''(۰)=۰$ اما تابع f'' در دو طرف $x=۰$ مثبت است و لذا تقعر همواره به سمت بالاست و جهت تقعر در $x=۰$ عوض نمی‌شود و لذا $x=۰$ یک نقطهٔ عطف این تابع نیست.

کار در کلاس

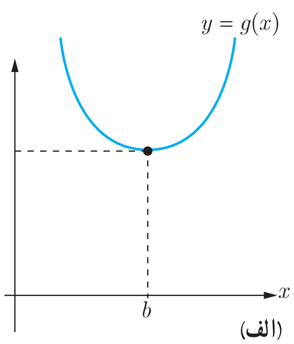
۱ در هر یک از نمودارهای زیر مشخص کنید آیا نقاط داده شده، نقاط عطف هستند یا نه؟

۲ نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی را مشخص کنید.

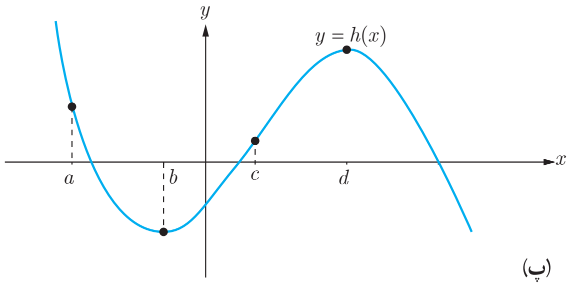
۳ خط مماس را در نقاط عطف رسم کنید.



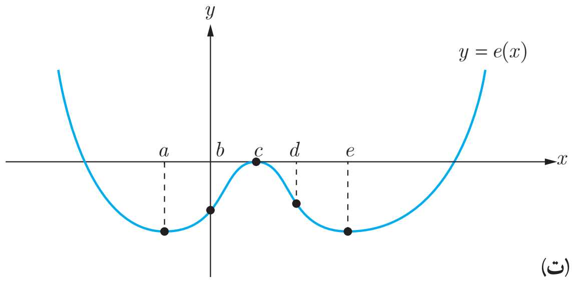
(ب)



(الف)



(پ)



(ت)

۴ کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست و کدام نادرست است. برای گزینه‌های نادرست مثال نقض بیاورید.

- در نقطه عطف علامت $f''(x)$ تغییر می‌کند.
- هر نقطه که علامت f'' در آن تغییر کند، نقطهٔ عطف است.
- هر نقطه‌ای که در آن مقدار f'' برابر صفر شود یک نقطه عطف است.
- تابع می‌تواند بیش از یک نقطه عطف داشته باشد.
- تابع صعودی اکید، نقطه عطف ندارد.

مثال : جهت تقعر توابع زیر را مشخص کنید و نقاط عطف آنها را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=x^۳-۶x^۲+۵$

ب) $f(x)=x^۴+۲x^۳-۳۶x^۲+۸$

حل :

الف)

$f''(x)=۶x-۱۲$ و $f'(x)=۳x^۲-۱۲x$

$f''(x)=\circ \Rightarrow x=۲$

از آنجا که $f''(x)$ یک تابع خطی است، همه جا مشتق‌پذیر است و تنها در $x=۲$ برابر صفر می‌شود. بنابراین تنها نقطه‌ای که می‌تواند نقطهٔ عطف باشد $x=۲$ است به شرط آنکه :

۱ $f'(۲)$ موجود باشد

۲ f'' در دو طرف $x=۲$ تغییر علامت دهد.

اما $f'(x)$ یک تابع چند جمله‌ای است و دامنهٔ آن $\mathbb{R}$ است و $f'(۲)$ نیز موجود و برابر ۱۲ است. از طرفی داریم :

x	$-\infty$	۲	$+\infty$
f''	$-$	۰	$+$
f	تقعر رو به پایین		تقعر رو به بالا
		نقطهٔ عطف	

ب)

$$f''(x) = ۱۲x^۲ + ۱۲x - ۷۲ \qquad f'(x) = ۴x^۳ + ۶x^۲ - ۷۲x$$

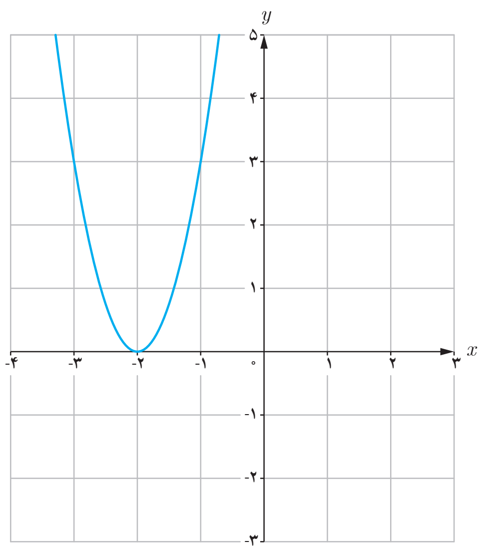
$$f''(x) = ۰ \Rightarrow ۱۲(x+۳)(x-۲) = ۰ \Rightarrow x = -۳ \quad \text{یا} \quad x = ۲$$

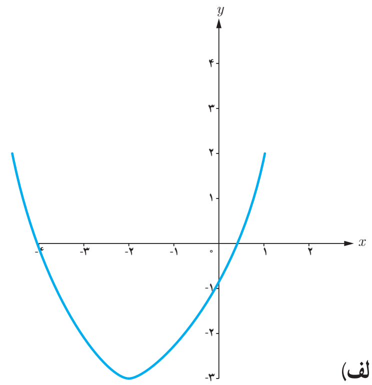
و $f'(-۳) = ۱۶۲$ و $f'(۲) = -۸۸$ موجودند. حال بررسی می‌کنیم که آیا f'' در اطراف این نقاط تغییر علامت می‌دهد یا نه؟

x	$-\infty$	-۳		۲	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$
$f(x)$	تقعر به سمت بالا		تقعر به سمت پایین		تقعر به سمت پایین
		نقطهٔ عطف		نقطهٔ عطف	

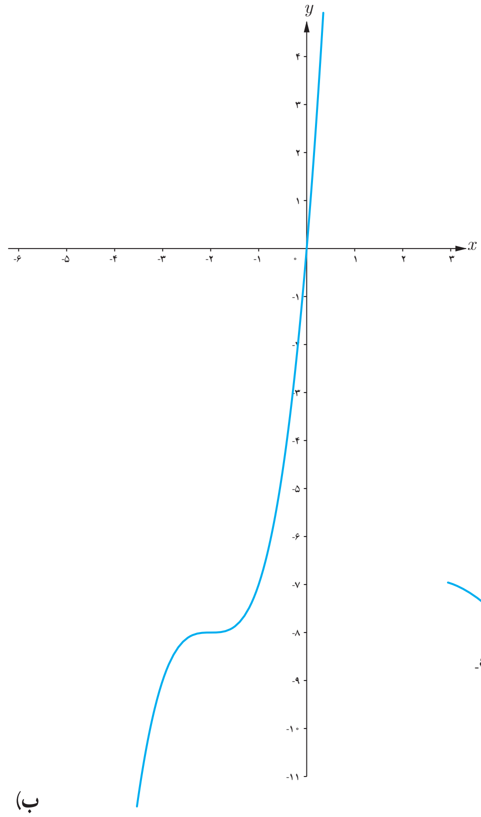
کاردرکلاس

۱ اگر شکل روبه‌رو مربوط به نمودار تابع $f'(x)$ باشد کدام نمودار می‌تواند نمودار تابع $f(x)$ باشد؟

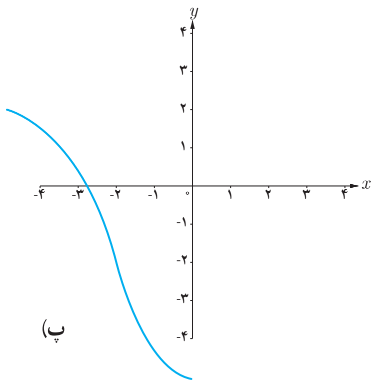




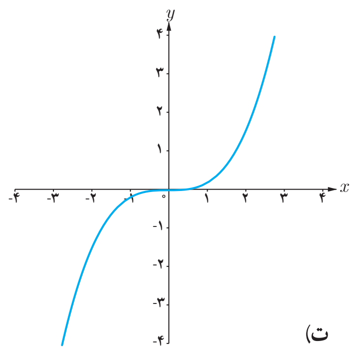
الف)



ب)

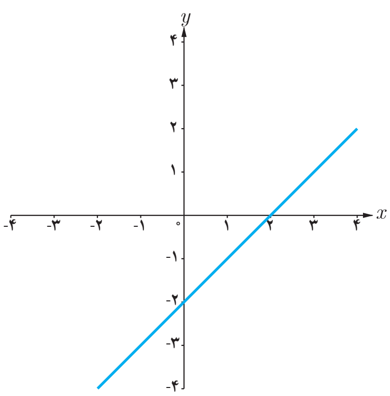


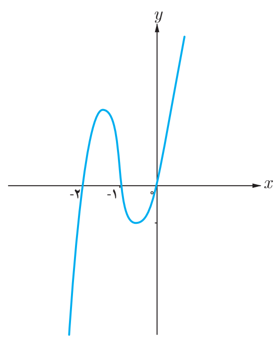
پ)



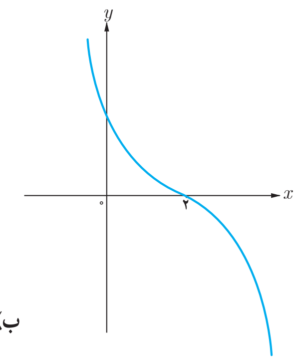
ت)

۲ اگر شکل زیر مربوط به نمودار تابع $f''(x)$ باشد کدام نمودار می‌تواند نمودار تابع $f(x)$ باشد؟

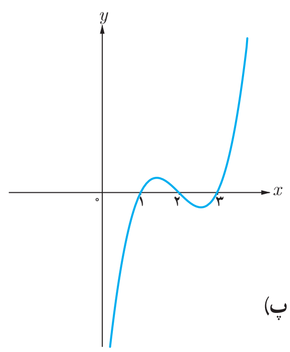




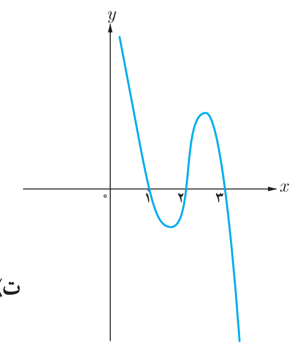
الف)



ب)



پ)



ت)

درس ۳

رسم نمودار توابع

می‌دانیم که هر تابع مانند f به ازای هر $x \in D_f$ دقیقاً یک مقدار y به‌دست می‌دهد به‌طوری‌که $y = f(x)$ و زوج مرتب (x , y) یک نقطه در دستگاه مختصات مشخص می‌کند. نمودار یک تابع، شکلی است که از همهٔ این نقاط (x , y) به ازای تمام $x \in D_f$ها تشکیل شده است. از آنجا که هر بازهٔ زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}$ تعداد بی‌شماری عضو دارد؛ لذا هیچ‌گاه نمی‌توان با قلم و کاغذ نمودار یک تابع را به‌طور کاملاً دقیق رسم کرد. در سال‌های گذشته با رسم نمودار توابع خطی و درجهٔ ۲ به کمک نقطه‌یابی آشنا شده‌اید. در این درس با به‌کارگیری مطالبی که قبلاً گفته شد نقاط مهمی از نمودار تابع را به‌دست آورده و به برخی ویژگی‌های آن تابع پی می‌بریم و با استفاده از آنها شکل تقریبی تابع را رسم می‌کنیم.

مثال : اگر بدانید تابع $y = f(x)$ به گونه‌ای است که برای آن داریم :

۱ ریشه‌های تابع f به‌صورت $x = ۱$ و $x = ۰$ و $x = -۲$ است و f همه جا مشتق‌پذیر باشد.

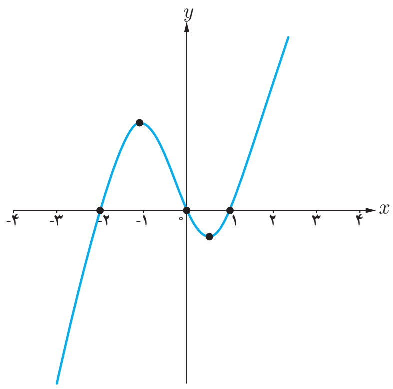
۲ ریشه‌های تابع f' به‌صورت $x = \frac{۱}{۲}$ و $x = -\frac{۶}{۵}$ است و علامت f' بین دو ریشه منفی و سایر جاها مثبت است.

۳ تابع f'' تنها یک ریشه در $x = -\frac{۱}{۳}$ دارد و علامت f'' در سمت چپ $-\frac{۱}{۳}$ منفی و در سمت راست آن مثبت است. در این صورت نمودار تابع f را رسم کنید.

حل : از (۲) نتیجه می‌شود که تابع f بین نقاط $x = \frac{۱}{۲}$ و $x = -\frac{۶}{۵}$ نزولی و سایر جاها صعودی است و $x = -\frac{۶}{۵}$ و $x = \frac{۱}{۲}$ به ترتیب طول نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع‌اند و از (۳) نتیجه می‌شود که تقعر تابع f قبل از $x = -\frac{۱}{۳}$ رو به پایین و در سمت راست $x = -\frac{۱}{۳}$ رو به بالاست و چون f' در $x = -\frac{۱}{۳}$ وجود دارد لذا $x = -\frac{۱}{۳}$ نقطهٔ عطف این تابع است. قبل از رسم شکل می‌توان همهٔ اطلاعات فوق را در یک جدول خلاصه کرد.

x	$-\infty$		$-\frac{۶}{۵}$		$-\frac{۱}{۳}$		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
f'		+	۰	−		−	۰	+	
f''		−		−	۰	+		+	
f		↗		↘		↘		↗	
			ماکزیمم		نقطه عطف		مینیمم		

با توجه به این اطلاعات و اینکه ریشه‌های تابع محل برخورد نمودار با محور xها هستند نمودار تابع به‌صورت روبه‌رو است.



همان‌طور که در این مثال مشاهده کردیم ریشه‌ها و علامت توابع f' و f'' کمک زیادی به رسم نمودار تابع می‌نماید. همچنین حد تابع در بی‌نهایت گویای رفتار و چگونگی تابع در نقاط انتهایی نموداری که رسم می‌کنیم است. به‌طور کلی برای رسم نمودار یک تابع، همه یا برخی از مراحل زیر را انجام می‌دهیم و با توجه به اطلاعات به‌دست آمده جدول رفتار تابع را تشکیل می‌دهیم و به کمک آن نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

۱ دامنهٔ تابع را مشخص می‌کنیم.

۲ محل تلاقی نمودار با محورهای مختصات را مشخص می‌کنیم (در صورت وجود).

۳ f' را به‌دست می‌آوریم و با تعیین علامت آن بازه‌هایی که f بر آنها صعودی یا نزولی است را به‌دست می‌آوریم.

۴ نقاط بحرانی و اکسترمم‌های نسبی تابع را به‌دست می‌آوریم (در صورت وجود).

۵ f'' را به‌دست می‌آوریم و با تعیین علامت آن جهت تقعر تابع در بازه‌های مختلف را مشخص می‌کنیم.

۶ نقطهٔ عطف تابع را مشخص می‌کنیم (در صورت وجود).

۷ رفتار تابع را برای مقادیر بسیار بزرگ x و بسیار کوچک x مشخص می‌کنیم (در صورت وجود).

۸ معادلهٔ مجانب‌های تابع را به‌دست می‌آوریم (در صورت وجود).

۹ تنظیم یک جدول که با خلاصه کردن اطلاعات توابع f و f' و f'' در آن تشخیص چگونگی شکل نمودار آسان‌تر شود.

۱۰ رسم نمودار تابع با استفاده از اطلاعات قسمت‌های قبل.

مثال : نمودار تابع $f(x)=x^3$ را رسم کنید.

حل : دامنهٔ این تابع تمام اعداد حقیقی است و این تابع در تمام دامنه‌اش پیوسته و مشتق‌پذیر است. حال با به‌دست آوردن f' و f'' و ریشه‌های آنها و تعیین علامت آنها جدول رفتار تابع را تشکیل می‌دهیم.

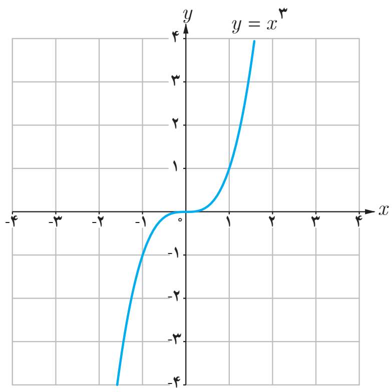
$f(x)=x^3=0 \rightarrow x=0 \rightarrow$ محل برخورد نمودار با محورهای مختصات $(0\,,0)$

$f'(x)=3x^2=0 \rightarrow x=0$

$f''(x)=6x=0 \rightarrow x=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	+		+
f''	−		+
f	↗		↗
	تقعر رو به پایین	نقطهٔ عطف	تقعر رو به بالا

این تابع همواره صعودی است و اکسترمم نسبی ندارد. از طرفی $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ لذا دو انتهای نمودار در ربع‌های اوّل و سوم قرار دارند. می‌توان برای دقیق‌تر شدن شکل نقاط بیشتری از منحنی را به‌دست آورد؛ مثلاً در اینجا $(1\,,1)$ و $(-1\,,-1)$ نیز بر نمودار تابع واقع‌اند. با توجه به آنچه گفته شد می‌توان نمودار تابع $y=x^3$ را به‌صورت مقابل رسم کرد.



مثال : جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=(x-1)^2(x+3)$ را رسم کنید.

حل : دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}$ است و این تابع همواره پیوسته و مشتق‌پذیر است.

$f(x)=0 \Rightarrow x=1$ یا $x=-3$ محل‌های برخورد با محور xها است $(-3\,,0)$ و $(1\,,0)$

$x=0 \Rightarrow y=3 \Rightarrow$ محل برخورد با محور yهاست $(0\,,3)$

$f'(x)=2(x-1)(x+3)+(x-1)^2=(x-1)(3x+5)$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=1$ یا $x=-\frac{5}{3} \Rightarrow$ نقاط بحرانی‌اند $(-\frac{5}{3}\,,\frac{256}{9})$ و $(1\,,0)$

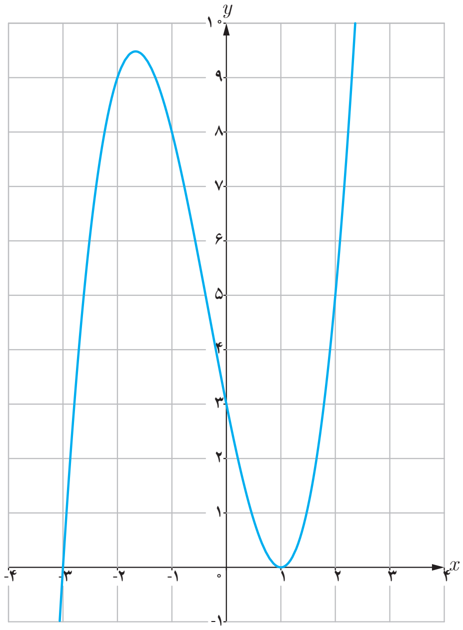
$f''(x)=(3x+5)+3(x-1)=6x+2$

$f''(x)=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$

از آنجا که مماس بر منحنی در نقطهٔ $x=-\frac{۱}{۳}$ وجود دارد و f'' در دو طرف نقطهٔ $x=-\frac{۱}{۳}$ تغییر علامت می‌دهد، نقطهٔ $\left(-\frac{۱}{۳}, \frac{۱۲۸}{۲۷}\right)$ نقطهٔ عطف تابع است.

x	$-\infty$		$-\frac{۵}{۳}$		$-\frac{۱}{۳}$		۱		$+\infty$
f'		+	۰	−		−	۰	+	
f''		−		−	۰	+		+	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			ماکزیمم		عطف		مینیمم		

از طرفی $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. حال با توجه به آنچه گفته شد نمودار تابع فوق به شکل روبه‌رو است.



تابع $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ را که در آن $c\neq ۰$ است تابع هموگرافیک می‌نامیم.

اگر $c=۰$ و $d\neq ۰$ باشد معادلهٔ این تابع به‌صورت $y=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}$ تبدیل می‌شود که معادلهٔ یک خط راست است و اگر $c\neq ۰$ و $d\neq ۰$ و $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ باشد این تابع به یک تابع ثابت تبدیل می‌شود.

در رسم نمودار تابع هموگرافیک توجه داریم که :

۱) $x\to\pm\infty \quad \Rightarrow \quad y\to\frac{a}{c} \quad \Rightarrow$ $y=\frac{a}{c}$ مجانب افقی این تابع است

۲) $y\to\pm\infty \quad \Rightarrow \quad x\to-\frac{d}{c} \quad \Rightarrow$ $x=-\frac{d}{c}$ مجانب قائم این تابع است

مثال : جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x+۲}{x-۱}$ را رسم کنید.

حل : دامنهٔ این تابع $D_f=\mathbb{R}-\{۱\}$ است. خط $y=۱$ مجانب افقی و خط $x=۱$ مجانب قائم این تابع است. همچنین نمودار تابع محورهای مختصات را در نقاط $(۰\,,\,-۲)$ و $(-۲\,,\,۰)$ قطع می‌کند. اکنون با گرفتن مشتق از تابع خواهیم داشت :

$$f'(x)=\frac{-۳}{(x-۱)^۲}\quad ,\ x\neq ۱$$

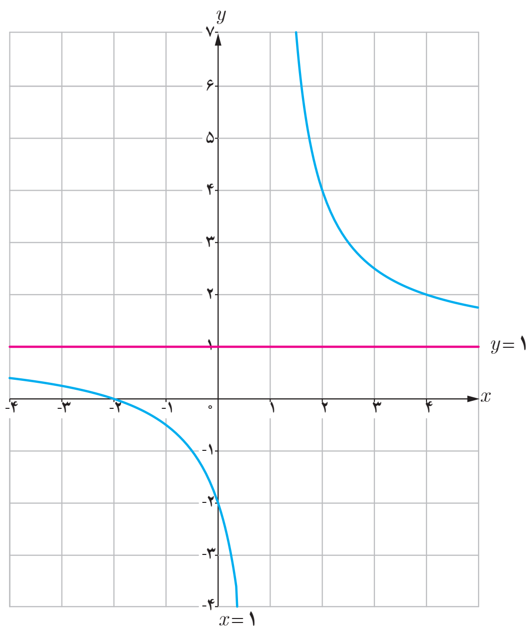
و بنابراین مشتق به ازای هر x در بازه‌های $(-\infty\,,\,۱)$ و $(۱\,,\,+\infty)$ همواره منفی است و لذا تابع f در هر کدام از این بازه‌ها نزولی است. حال با گرفتن مشتق دوم خواهیم داشت.

$$f''(x)=\frac{۶(x-۱)}{(x-۱)^۴}=\frac{۶}{(x-۱)^۳}\quad ,\ x\neq ۱$$

بنابراین برای هر x در بازهٔ $(-\infty\,,\,۱)$ داریم $f''(x)<۰$، لذا تقعر منحنی به سمت پایین و برای هر x در بازهٔ $(۱\,,\,+\infty)$ داریم $f''(x)>۰$ و لذا تقعر منحنی به سمت بالاست. جدول رفتار تابع به‌صورت زیر است :

x	$-\infty$	-۲	۰	۱	$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	$-$	
y''	$-$	$-$	$-$	$+$	
y	نزولی و تقعر به سمت پایین	نزولی و تقعر به سمت پایین	نزولی و تقعر به سمت پایین	نزولی و تقعر به سمت بالا	
		$(-۲\,,\,۰)$	$(۰\,,\,-۲)$	∞	

با توجه به اطلاعات این جدول می‌توان نمودار این تابع را به‌صورت روبه‌رو رسم کرد.



مثال : جدول تغییرات و نمودار تابع $y=\dfrac{۳x+۴}{-۲x+۱}$ را رسم کنید.

حل : دامنهٔ این تابع $D=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{۱}{۲}\right\}$ است. داریم $y \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} -\dfrac{۳}{۲}$، لذا $y=-\dfrac{۳}{۲}$ مجانب افقی این تابع است و از طرفی $y \underset{x\to\frac{۱}{۲}}{\longrightarrow} \pm\infty$، لذا $x=\dfrac{۱}{۲}$ مجانب قائم این تابع است. همچنین نمودار در نقاط $(۰\,,۴)$ و $(-\dfrac{۴}{۳}\,,۰)$ محورهای مختصات را قطع می‌کند.

$$f'(x)=\frac{۱۱}{(-۲x+۱)^۲} \quad \text{و} \quad x\neq\frac{۱}{۲}$$

بنابراین مشتق به ازای هر x در بازه‌های $(-\infty\,,\frac{۱}{۲})$ و $(\frac{۱}{۲}\,,+\infty)$ همواره مثبت و در نتیجه تابع f در هر کدام از این بازه‌ها صعودی است.

$$f''(x)=\frac{۴۴}{(-۲x+۱)^۳} \quad \text{و} \quad x\neq\frac{۱}{۲}$$

بنابراین برای هر x در بازهٔ $(-\infty\,,\frac{۱}{۲})$ داریم $f''>۰$، لذا تقعر منحنی به سمت بالاست و برای هر x در بازهٔ $(\frac{۱}{۲}\,,+\infty)$ داریم $f''<۰$، لذا تقعر منحنی به سمت پایین است. جدول رفتار تابع به‌صورت زیر است :

x		—		۰		$\frac{۱}{۲}$	
y'	+		+		+		+
y''	+		+		+		−
y	صعودی و تقعر بالا		صعودی و تقعر بالا		صعودی و تقعر بالا		صعودی و تقعر پایین
		$(-\frac{۴}{۳}\,,۰)$		$(۰\,,۴)$		∞	

با توجه به اطلاعات این جدول و به کمک چند نقطهٔ کمکی می‌توان نمودار این تابع را به‌صورت زیر رسم کرد.