فصل ۱: مجموعه، الگو و دنباله

درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌ی اعداد

مجموعه‌ی اعداد طبیعی: $\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,...\}$

مجموعه‌ی اعداد حسابی: $W=\{۰,۱,۲,۳,...\}$

مجموعه‌ی اعداد صحیح: $\mathbb{Z}=\{...,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,...\}$

مجموعه‌ی اعداد گویا: $\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n} \mid m,n\in\mathbb{Z}\ ,\ n\neq ۰\right\}$

مجموعه‌ی اعداد گنگ: $\mathbb{Q}'=$ مجموعه‌ی اعدادی که نتوان آن‌ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد

مجموعه‌ی اعداد حقیقی: $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$

نکته: $\mathbb{N}\subseteq W\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$

نکته: هر عدد دلخواه جایی روی محور اعداد حقیقی دارد و برعکس هر نقطه روی این محور نشان‌دهنده‌ی یک عدد حقیقی است.

مثال: مجموعه‌ی $W-\mathbb{N}$ چند عضو دارد؟

مثال: مجموعه‌ی $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ چه نام دارد؟

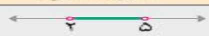
مثال: اعداد زیر را روی محور نشان دهید.

$$۳\ ,\ -۲\ ,\ ۲/۴\ ,\ -۳/۲\ ,\ \frac{۲}{۳}\ ,\ -\frac{۱}{۴}\ ,\ \frac{\pi}{۲}\ ,\ \sqrt{۵}\ ,\ \sqrt{۱۰}\ ,\ ۲\sqrt{۵}\ ,\ \sqrt{۱۷}$$

بازه‌ها

زیر مجموعه‌هایی از اعداد حقیقی را که شامل تمام اعداد حقیقی بین دو عدد مشخص‌اند، ((بازه)) یا ((فاصله)) می‌نامیم.

مثال: جدول زیر را کامل کنید.

نمایش هندسی	نمایش به صورت مجموعه	نمایش با نماد بازه	نوع بازه
	$\{x \mid x\in R, ۲<x<۵\}$	$(۲,۵)$	باز
...	$\{x \mid x\in R, ۲\le x\le ۵\}$	...	...
	...	...	نیم باز
...	...	$(۲,۵]$	...
	...	...	...
...	$\{x \mid x\in R, x\ge ۲\}$	...	...
...	$\{x \mid x\in R, x<۵\}$	...	...
...	...	$(-\infty\ ,\ ۵]$	...
...	...	$[۰\ ,\ +\infty)$	...
...	...	$(-\infty\ ,\ ۰)$	...
...	$\{x \mid x\in R, x>۰\}$	...	...
...	$\{x \mid x\in R, x\le ۰\}$	...	...
...	...	$(-\infty\ ,\ +\infty)$	...

مثال: حاصل مجموعه‌های زیر را از طریق نمایش هندسی به دست آورید.

۱) $(-۲,۵]\cup(۱,+\infty)$

۲) ۱) $(-۲,۵]\cap(۱,+\infty)$

۳) $(-\infty,۳)\cap[-۲,+\infty)$

۴) $[-۲,۴]\cup[۱,۶)$

$۵) \ (-۴,۲]-(-۱,۳]$

$۶) \ (-۱,۳]-(-۴,۲]$

$۷) \ [-۲,۴]\cap[۱,۶)$

مثال: مجموعه $\mathbb{R}-\{۲\}$ را روی محور نشان داده و آن را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید.

مجموعه‌های متناهی: مجموعه‌هایی را که تعداد اعضای آن‌ها یک عدد حسابی است، مجموعه‌های متناهی می‌نامیم.

مجموعه‌های نامتناهی: مجموعه‌هایی را که متناهی نباشند، نامتناهی می‌گوییم.

مثال: جدول زیر را کامل کنید.

مجموعه	نامتناهی	متناهی	تعداد اعضا (در مورد مجموعه‌های متناهی)
مجموعه اعداد اول یک رقمی			
مجموعه انسان‌های روی زمین			
مجموعه اعداد طبیعی فرد			
مجموعه سلول‌های عصبی مغز یک انسان			
مجموعه تمام دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات			
مجموعه دانش‌آموزان مدرسهٔ شما			
مجموعه اعداد طبیعی ده رقمی			
مجموعه درخت‌های جنگل های آمازون			
مجموعه کسرهای مثبت با صورت یک			
مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰			
بازه $(۰,۱)$			

مثال: متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعه‌ی اعداد حسابی

ب) مجموعه‌ی شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۲

پ) بازه $\left(\frac{۲}{۵},\frac{۱}{۲}\right)$

ت) $A=\{x\in\mathbb{N} \mid ۲<x<۳\}$

ث) $B=\{x\in\mathbb{Q} \mid ۲<x<۳\}$

ج) مجموعه‌ی اعداد طبیعی دو رقمی

چ) مجموعه‌ی اعداد گویا

ح) مجموعه‌ی اعداد گنگ

مثال: بین دو عدد گویای $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۵}{۳}$، سه عدد گویا بنویسید.

مثال: چهار عدد گویا از بازه‌ی $(۰,۱)$ بنویسید.

مثال: اگر A دارای یک زیر مجموعه‌ی نامتناهی باشد، آن‌گاه A یک مجموعه‌ی .... خواهد بود.

مثال: اگر $A\subseteq B$ و B متناهی باشد، آن‌گاه A یک مجموعه‌ی .... خواهد بود.

درس دوم: متمم یک مجموعه

مجموعه‌ی مرجع

در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همه‌ی مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه‌ی آن باشند، مجموعه‌ی مرجع می‌نامیم و آن را با U نشان می‌دهیم.

متمم یک مجموعه

هرگاه U مجموعه‌ی مرجع باشد و $A\subseteq U$، آن‌گاه مجموعه‌ی $U-A$ را متمم A می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر A' شامل عضوهایی از U است که در A نیستند.

مثال: اگر $U=\{۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$ و $A=\{۲,۴,۶\}$ و $B=\{۳,۵,۷,۹\}$ باشند، اعضای مجموعه‌های زیر را بنویسید.

۱) A'
۲) B'
۳) $A-B$
۴) $A\bigcap B$
۵) $A\bigcup B$
۶) $A-(A\bigcap B)$
۷) $(A\bigcup B)\bigcap A$
۸) $(A\bigcup B)-(A\bigcap B)$
۹) $A'\bigcup B$
۱۰) $A\bigcap B'$
۱۱) $(A-B)'$
۱۲) $(A\bigcup B)'-A$
۱۳) $(A')'$

مثال: اگر $A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,-۲<x\le ۳\}$ باشد:

الف) اعضای مجموعه‌ی A را بنویسید.

ب) اعضای A' را بنویسید.

مثال: اگر $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-۲<x\le ۳\}$ باشد:

الف) B را روی محور نشان دهید.

ب) B' را روی محور نشان داده و به صورت بازه بنویسید.

مثال: اگر $\mathbb{Z}$ به عنوان مجموعه‌ی مرجع باشد، $\mathbb{N}'$ را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

مثال: اگر $\mathbb{R}$ به عنوان مجموعه‌ی مرجع باشد، $\mathbb{N}'$ را روی محور نشان دهید.

نمودار ون

مجموعه‌های جدا از هم

به دو مجموعه مثل A و B که عضو مشترک نداشته باشند، دو مجموعه‌ی جدا از هم یا مجزا می‌گوییم.

$A\bigcap B=\varnothing$

به عنوان مثال دو مجموعه‌ی $A=\{۲,۴,۶\}$ و $B=\{۳,۵\}$ جدا از هم هستند.

تعداد عضوهای یک مجموعه

اگر A یک مجموعه‌ی متناهی باشد، تعداد عضوهای آن را با $n(A)$ نشان می‌دهیم.

نکته: $n(A\bigcup B)=n(A)+n(B)-n(A\bigcap B)$

نکته: $n(A\bigcup B)'=n(\mathrm{U})-n(A\bigcup B)$

مثال: اگر $n(A)=10$ و $n(A\bigcap B)=3$ و $n(A\bigcup B)=17$ باشد، $n(B)$ را به دست آورید.

مثال: اگر $n(U)=50$ و $n(A)=20$ و $n(B)=25$ و $n(A\bigcap B)=10$ باشد، مطلوب است:

۱) $n(A\bigcup B)$ ۲) $n(A'\bigcap B)$ ۳) $n(A\bigcap B')$ ۴) $n(A'\bigcap B')$

مثال: در یک کلاس ۲۸ نفری، تعداد ۱۶ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۴ نفر عضو تیم والیبال هستند. اگر ۴ نفر عضو هیچ تیمی نباشند، مشخص کنید چند نفر از آن‌ها عضو هر دو تیم هستند.

مثال: در یک جشنواره فیلم ۲۵ فیلم شرکت کرده‌اند. در بین آن‌ها ۸ فیلم کارتونی و ۱۰ فیلم طنز وجود دارد. ۳ تا از فیلم‌های کارتونی نیز مضمون طنز دارند:

الف) تعداد فیلم‌هایی که کارتونی یا طنز هستند چقدر است؟

ب) تعداد فیلم‌هایی که نه کارتونی و نه طنز هستند چقدر است؟

مثال: در یک کلاس ۳۵ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو گروه سرود و ۱۸ نفر عضو گروه تئاتر هستند. اگر ۶ نفر از دانش‌آموزان عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است تعداد دانش‌آموزانی که:

الف) فقط عضو گروه سرودند.

ب) فقط عضو گروه تئاترند.

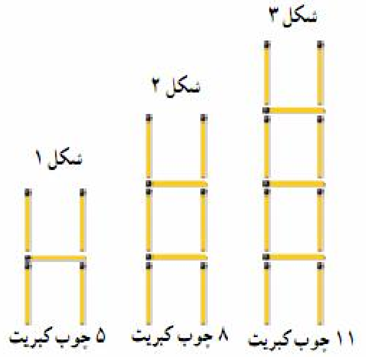
پ) عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند.

ت) حداقل عضو یک گروه هستند

ث) دقیقا عضو یک گروه هستند.

درس سوم: الگو و دنباله

مثال: با توجه به شکل زیر، جدول را کامل کنید.



شمارهٔ شکل: n	۱	۲	۳	۴	...	n	...
تعداد چوب‌کبریت‌ها: a_n	۵	۸	۱۱	...	...	...	...
رابطه بین n و a_n	$a_1=5$	$a_2=8$	$a_3=11$	...	...	$a_n=\dots$	...

الگوی خطی

الگویی است که در آن اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی، عددی ثابت باشد.

نکته: حالت کلی الگوهای خطی به صورت $t_n = an+b$ می‌باشد. که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند. (به فرمول فوق جمله‌ی عمومی الگو می‌گوییم) مثل $t_n = ۲n-۳$ $\qquad a_n = \frac{۱}{۲}n+\frac{۲}{۵}$ $\qquad b_n = -n$

نکته: اگر جملات یک الگوی خطی را در دستگاه محورهای مختصات پیدا کرده و به هم وصل کنیم یک خط راست به دست می‌آید.

مثال: جمله‌ی عمومی یک الگوی خطی به صورت $a_n = -۲n+۵$ می باشد:

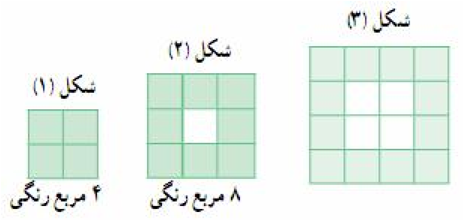
الف) جملات دهم و پانزدهم الگو را به دست آورید.

ب) جمله‌ی چندم الگو برابر با -۵۵ است؟

مثال: در یک الگوی خطی، جملات چهارم و دهم به ترتیب ۱۷ و ۴۱ می‌باشند. جمله‌ی عمومی الگو را بیابید.

مثال: با توجه به شکل زیر، جدول را کامل کنید و الگویی برای یافتن تعداد مربع‌های رنگی در مراحل بعدی بیابید.

- شکل شماره ۲۰۰ دارای چند مربع رنگی است؟
- در چه مرحله‌ای از الگوی بالا، تعداد مربع‌های رنگی برابر ۷۲ است؟



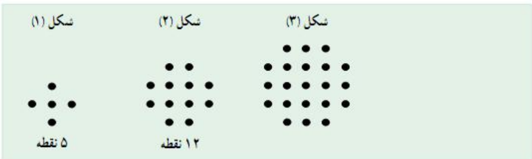
شمارهٔ شکل : n	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد مربع‌های رنگی : b_n	۴	۸	...	...	...
رابطه بین n و b_n	$b_۱=۴$	$b_۲=$	...	...	...

الگوهای غیر خطی

در جمله‌ی عمومی الگوی غیر خطی، در توان متغیر n عددی غیر از ۱ ظاهر می‌شود.

مثال: با توجه به شکل زیر، جدول را کامل کنید و الگویی برای یافتن تعداد نقطه‌ها در مراحل بعدی بیابید.

- شکل شماره ۱۰ دارای چند نقطه است؟
- در چه مرحله‌ای از الگوی بالا، تعداد نقطه‌ها برابر ۴۸۰ است؟

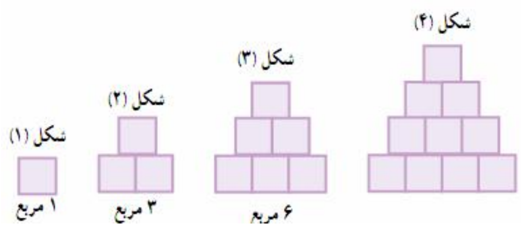


شمارهٔ شکل : n	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد نقطه‌ها : t_n	۵	۱۲	...	...	...
رابطه بین n و t_n	$t_۱=۵$	$t_۲=$	...	...	...

دنباله: هر تعداد عدد را که پشت سر هم قرار بگیرند، یک دنباله می‌نامیم. این اعداد را جملات دنباله می‌گوییم.

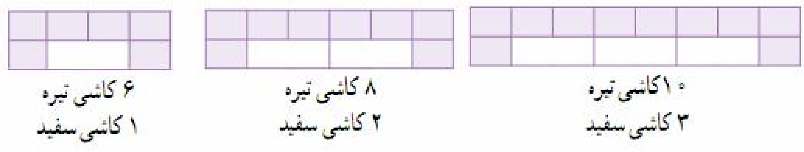
نکته: جملات دنباله ممکن است دارای الگو باشند و یا الگویی نداشته باشند.

مثال: با توجه به شکل زیر، الگویی برای یافتن تعداد مربع‌ها در مراحل بعدی بیابید.



مثال: حاصل $۱+۲+۳+...+n$ را به دست آورید.

مثال: الگوی زیر را در نظر بگیرید.



الف) شکل بعدی را رسم کنید و تعداد کاشی‌های تیره‌ی آن را مشخص کنید.

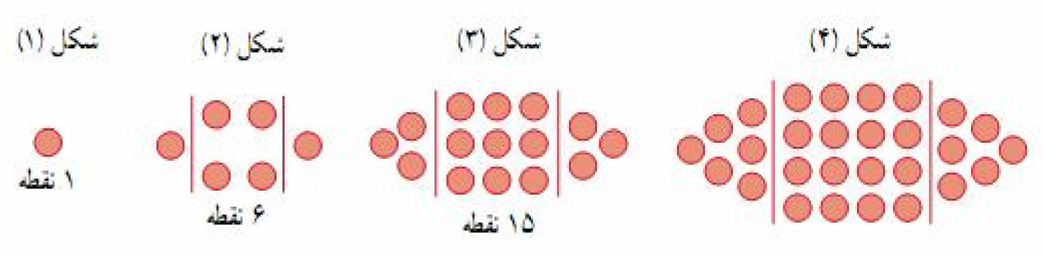
ب) تعداد کاشی‌های تیره در هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله‌ی هفتم آن بنویسید.

پ) اگر n تعداد کاشی‌های سفید و t_n تعداد کاشی‌های تیره باشد، مقدار t_n را بر حسب n بنویسید.

ت) برای ۱۰۰ کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است.

ث) آیا در این الگو، شکلی وجود دارد که شامل ۵۰ کاشی تیره باشد، اگر هست، تعداد کاشی‌های سفید آن چندتاست؟

مثال: الگوی زیر را در نظر بگیرید.



الف) جمله‌ی عمومی الگو را بیابید.

ب) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟

مثال: جمله‌ی عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد، چهار جمله‌ی اول دنباله را بنویسید و سپس به هر یک از آن‌ها یک الگوی هندسی نظیر کنید.

۱) $a_n = ۴n$ ۲) $b_n = ۳n + ۱$ ۳) $c_n = n^۲ + ۲$ ۴) $d_n = n^۲ + n$

مثال: برای دنباله‌های درجه‌ی دو زیر، یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن، جمله‌ی عمومی هر دنباله را بیابید.

۱) ۵, ۸, ۱۳, ۲۰, ۲۹, ...

۲) ۵, ۱۲, ۲۲, ۳۵, ۵۱, ...

مثال: سه جمله‌ی اول دنباله‌های زیر را بنویسید.

۱) $a_n = \frac{۲(-۱)^{n-۱}}{n^۲ + ۳}$ ۲) $u_n = \frac{۴n - ۳}{n^۲ + n}$

۳) $a_n = \frac{۳^n + ۲n - ۱}{n + ۲}$ ۴) $b_n = \frac{n(-۱)^n}{۳n - ۲}$

۵) $c_n = ۲n^۲ - \frac{۱}{n}$ ۶) $d_n = ۳^n - n^۲$

مثال: جمله‌ی عمومی دنباله‌ای به صورت $a_n = \frac{۳(-۲)^n}{n + ۱}$ است. جمله‌ی سوم این دنباله را بنویسید.

مثال: کدام جمله از دنباله‌ی $b_n = \frac{۲n - ۴}{n + ۱}$ برابر $\frac{۱۱}{۷}$ است؟

مثال: جمله‌ی چندم دنباله‌ی $a_n = \frac{۶n + ۵}{n + ۵}$ برابر ۵ است؟

مثال: چندمین جمله از دنباله‌ی $c_n = \dfrac{n^۲ + n}{۳n - ۱}$ برابر $\dfrac{۳}{۲}$ است؟

مثال: جمله‌ی عمومی دنباله‌ای به صورت $u_n = n^۲ + ۴n - ۳$ می‌باشد. تعیین کنید کدام جمله‌ی آن ۴۲ است.

درس سوم: دنباله‌های حسابی و هندسی

دنباله‌ی حسابی

دنباله‌ای که در آن، هر جمله (به جز جمله‌ی اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله‌ی قبل از خودش به دست می‌آید، یک دنباله‌ی حسابی نامیده می‌شود و به آن جمله‌ی ثابت، قدر نسبت گفته و با حرف d نشان می‌دهیم.

مثال: کدام‌یک از دنباله‌های زیر، حسابی است؟ در صورت حسابی بودن، قدر نسبت آن را بیابید.

۱) $۳, ۷, ۱۱, ۱۵, \dots$ ۲) $۲, ۶, ۱۲, ۲۴, \dots$ ۳) $۸, ۵, ۲, -۱, \dots$ ۴) $۲, ۵, ۹, ۱۴, \dots$

۵) $\sqrt{۳}, ۲\sqrt{۳}, ۳\sqrt{۳}, \dots$ ۶) $۴, ۴, ۴, \dots$

جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی

اگر $t_۱$ جمله‌ی اول و d قدر نسبت یک دنباله‌ی حسابی باشد، جمله‌ی عمومی (جمله‌ی nام) آن از فرمول زیر به دست می‌آید. $t_n = t_۱ + (n-۱)d$

نکته: برای نوشتن جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی، باید جمله‌ی اول و قدر نسبت دنباله را داشته باشیم.

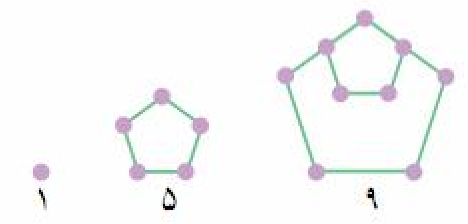
مثال: جمله‌ی عمومی دنباله‌های حسابی زیر را بنویسید.

۱) $۴, ۷, ۱۰, \dots$ ۲) $۱۴, ۱۰, ۶, \dots$ ۳) $-۳, -\dfrac{۱}{۲}, ۰, \dots$

مثال: جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی -۲ و قدر نسبت آن ۳ است. جمله‌ی چندم آن ۵۸ است؟

مثال: چندمین جمله از دنباله‌ی حسابی $-۵, -۱, ۳, \dots$ برابر ۷۵ است؟

مثال: با توجه به الگوی زیر:



الف) جمله‌ی عمومی دنباله را مشخص کنید.

ب) جمله‌ی چندم آن ۳۹۷ است؟

مثال: ۱۰۰ قرص نان را بین ۵ نفر چنان تقسیم کنید که سهم‌های دریافت شده، دنباله‌ی حسابی تشکیل دهند و یک سوم مجموع سه سهم بزرگ‌تر، مساوی مجموع دو سهم کوچک‌تر باشد.

نکته: اگر جمله‌ی mام و جمله‌ی nام یک دنباله‌ی حسابی معلوم باشند، قدر نسبت دنباله را می‌توان از فرمول زیر به دست آورد. $d = \dfrac{a_n - a_m}{n - m}$

مثال: اگر در یک دنباله‌ی حسابی، جملات دوم و هشتم به ترتیب -۲ و ۱۰ باشند، قدر نسبت را بیابید.

مثال: اگر جمله‌ی هفتم یک دنباله‌ی حسابی برابر ۳۵ و جمله‌ی یازدهم آن برابر ۲۳ باشد، این دنباله را مشخص کنید. (a و d را بیابید)

مثال: اگر جمله‌ی ششم یک دنباله‌ی حسابی برابر ۱۷ و جمله‌ی دهم آن برابر ۳۷ باشد، جمله‌ی بیست و یکم این دنباله را بیابید.

مثال: دنباله‌ای حسابی را مشخص کنید که جمله‌ی سوم آن برابر ۸− و جمله‌ی دهم آن ۱۸ واحد از جمله‌ی سیزدهم کوچک‌تر باشد.

مثال: در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع جملات سوم و پنجم برابر ۱۸ و مجموع جملات ششم و نهم برابر ۳۲ است. دنباله را مشخص کنید.

مثال: در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع سه جمله‌ی اول برابر ۳ و مجموع سه جمله‌ی بعدی آن برابر ۳۹ است. دنباله را مشخص کنید.

واسطه‌ی حسابی: اگر a,b,c سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند، در این صورت به عدد b واسطه‌ی حسابی دو عدد a و c می‌گوییم.

نکته: اگر a,b,c سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند، در این صورت $b=\frac{a+c}{۲}$ یا $۲b=a+c$

مثال: مقدار x را چنان بیابید که $۲x-۸, x-۱, ۴x-۲$ سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند.

مثال: اگر $۱۱-۴m$ و $۳m+۲$ و $m-۱$ سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی حسابی باشند، مقدار m را بیابید.

مثال: واسطه‌ی حسابی بین $۲x-۲$ و $۳x-۱$ برابر ۱۱ است. مقدار x را به دست آورید.

مثال: بین دو عدد ۳ و ۱۱ سه جمله چنان بنویسید که پنج جمله‌ی حاصل تشکیل دنباله‌ی حسابی بدهند.

مثال: بین دو عدد ۸− و ۱۲ چهار عدد چنان بنویسید که شش جمله‌ی حاصل تشکیل دنباله‌ی حسابی بدهند.

دنباله‌ی هندسی: دنباله‌ای است که در آن، هر جمله (به جز جمله‌ی اول) از ضرب جمله‌ی قبل از خودش در عددی ثابت به دست می آید. این عدد را قدر نسبت نامیده و آن را با حرف r نشان می‌دهیم.

مثال: کدام یک از دنباله‌های زیر هندسی است؟ در صورت هندسی بودن، قدر نسبت را بنویسید.

۱) $۷,۱۴,۲۸,...$ ۲) $۳\sqrt{۷},۶\sqrt{۷},۱۲\sqrt{۷},...$ ۳) $\sqrt{۳},۳,۳\sqrt{۳},...$ ۴) $۱,-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۹},...$

۵) $۳,۳,۳,...$

جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی هندسی: اگر $t_۱$ جمله‌ی اول و r قدر نسبت یک دنباله‌ی هندسی باشد، جمله‌ی عمومی (جمله‌ی nام) آن از فرمول زیر به دست می‌آید. $t_n=t_۱r^{n-۱}$

نکته: برای نوشتن جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی هندسی، باید جمله‌ی اول و قدر نسبت دنباله را داشته باشیم.

مثال: جمله‌ی عمومی دنباله‌های حسابی زیر را بنویسید.

۱) $۲,۶,۱۸,...$ ۲) $۲۵,۵,۱,...$ ۳) $-۳,۳,-۳,...$

مثال: جمله‌ی یازدهم دنباله‌ی هندسی $۴,۱۲,۳۶,...$ چند برابر جمله‌ی هشتم آن است؟

مثال: اگر جمله‌ی سوم یک دنباله‌ی هندسی برابر ۱۲ و جمله‌ی ششم آن برابر ۹۶ باشد، این دنباله را مشخص کنید.

مثال: جملات سوم و هشتم یک دنباله‌ی هندسی به ترتیب ۴ و $\frac{۱}{۸}$ است، جمله‌ی پنجم این دنباله را بیابید.

مثال: جمله‌ی چندم دنباله‌ی هندسی $\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۹},\frac{۱}{۲۷},...$ برابر ۸۱ است؟

مثال: اگر $a_۱,a_۲,a_۳,...,a_n,...$ یک دنباله‌ی هندسی باشد و $a_۱a_۳=۴$ و $a_۳a_۵=۱۶$ باشد، جمله‌ی اول و قدر نسبت این دنباله‌ی هندسی را بیابید.

مثال: یک کوه یخی هزار تنی، در هر روز، یک پنجم وزن خود را از دست می‌دهد.پس از گذشت ۵ روز، تقریبا چه مقدار آن باقی می‌ماند؟

الف) چیزی از آن باقی نمی‌ماند.

ب) حدود $\frac{۱}{۳}$ آن باقی می‌ماند.

پ) تقریبا نصف آن آب می‌شود.

ت) حدود $\frac{۲}{۳}$ آن باقی می‌ماند.

مثال: علی دوچرخه‌ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت دوچرخه‌ی دست دوم، در هر سال ۲۰ درصد نسبت به سال قبل از خودش کاهش یابد.

الف) اگر او بعد از سه سال قصد فروش دوچرخه‌اش را داشته باشد، به چه قیمتی می‌تواند آن را بفروشد؟

ب) قیمت دوچرخه بعد از گذشت n سال از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

مثال: حاصل‌ضرب بیست جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی مقابل را به دست آورید. $۲,۴,۸,...$

واسطه‌ی هندسی: اگر a,b,c سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، در این صورت به عدد b واسطه‌ی هندسی دو عدد a و c می‌گوییم.

نکته: اگر a,b,c سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، در این صورت $b^۲=ac$.

مثال: مقدار m را چنان بیابید که $m-۱,۴m-۱,۱۰m+۵$ سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند.

مثال: مقدار x را چنان بیابید که $x+۱,۳x,x+۱۰$ سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی شود.

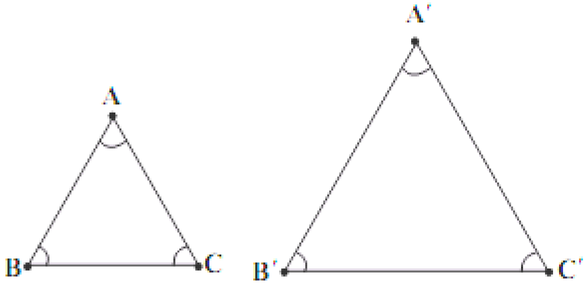
مثال: واسطه‌ی هندسی دو عدد $۷^۶\times ۵^۳$ و $۵^۷\times ۷^۲$ را بیابید.

فصل ۲: مثلثات

درس اول: نسبت‌های مثلثاتی

مثلث‌های متشابه: دو مثلث را متشابه گوییم هرگاه، زاویه‌های نظیر در آن‌ها باهم برابر و اضلاع متناظر باهم متناسب باشند.

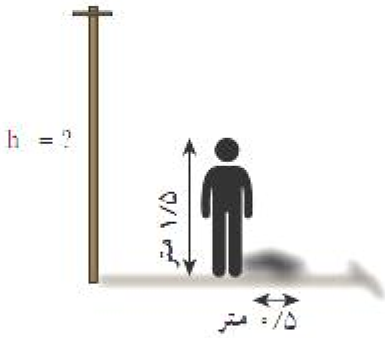
پس اگر دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه باشند، آن‌گاه: $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}$ و $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{BC}{B'C'}$



نکته: هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلثی دیگر مساوی باشد، آن دو مثلث، باهم متشابه‌اند.

نکته: دو مثلث قائم‌الزاویه که یک زاویه‌ی حاده‌ی برابر داشته باشند، باهم متشابه‌اند.

مثال: دانش‌آموزی می‌خواهد ارتفاع یک تیر برق را که طول سایه‌ی آن ۳ متر است، حساب کند. قد دانش‌آموز ۱/۵ متر است و طول سایه‌ی او در همان لحظه ۰/۵ متر است. ارتفاع تیر برق چه‌قدر است؟

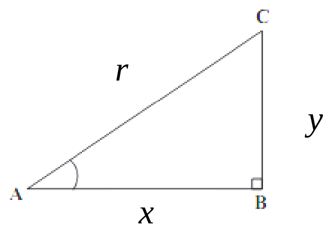


یادآوری رابطه‌ی فیثاغورس: در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر است با مجموع مربعات دو ضلع قائمه. به عبارت دیگر در شکل زیر: $x^2+y^2=r^2$

نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه: در یک مثلث قائم الزاویه به شکل زیر، نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه‌ی حاده از فرمول‌های زیر تعیین می‌شوند.

$$\sin A=\frac{y}{r} \qquad \cos A=\frac{x}{r}$$

$$\tan A=\frac{y}{x} \qquad \cot A=\frac{x}{y}$$



مثال: با رسم یک مثلث متساوی‌الاضلع به ضلع ۲ واحد، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ۳۰° و ۶۰° را بیابید.

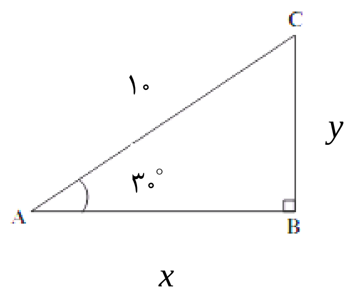
مثال: با رسم یک مربع به ضلع ۱ واحد و رسم یکی از قطرهای آن نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی ۴۵° را بیابید.

مثال: یک مثلث قائم الزاویه رسم کنید که یکی از زاویه‌های آن ۵۰° باشد و نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی ۵۰° را با استفاده از خط‌کش و به طور تقریبی به دست آورید.

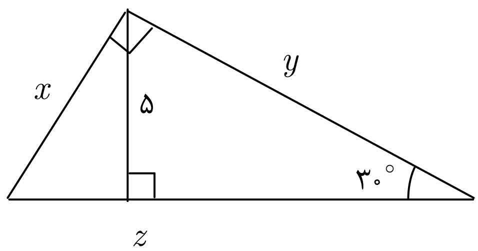
جدول مقادیر نسبت‌های مثلثاتی بعضی از زاویه‌ها

	۳۰°	۴۵°	۶۰°
sin	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
cos	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
tan	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$
cot	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

مثال: در شکل‌های زیر مقادیر x و y و r را به دست آورید.

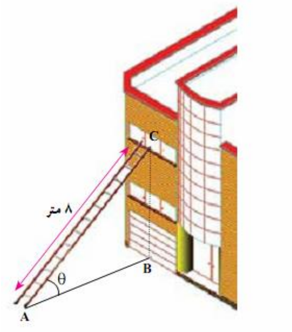


مثال: در مثلث زیر مقادیر مجهول را به دست آورید.



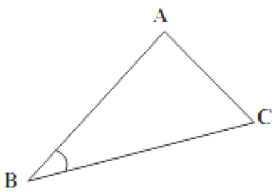
مثال: یک موشک در ارتفاع ۱۵ متری از سطح زمین و با زاویه‌ی ۳۰° پرتاب می‌شود. این موشک پس از طی ۲۰۰۰ متر با همین زاویه، به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد؟

مثال: مطابق شکل، نردبانی به طول ۸ متر در زیر پنجره‌ی ساختمانی قرار گرفته است. اگر زاویه‌ی نردبان با سطح زمین $\theta = ۳۰^\circ$ باشد، ارتفاع پنجره تا زمین را محاسبه کنید. فاصله‌ی پای نردبان تا ساختمان چه‌قدر است؟

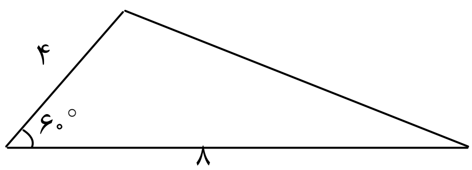


مثال: یک هواپیما در ارتفاع $۲km$ از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه‌ی هواپیما با افق حدود ۱۳° باشد، هواپیما در چه فاصله‌ای از نقطه‌ی A فرود می‌آید؟ $\tan ۱۳^\circ \simeq ۰/۲۳$

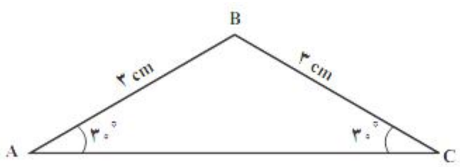
نکته: مساحت هر مثلث دلخواه را می‌توان با داشتن اندازه‌های دو ضلع و زاویه بین آن دو ضلع به صورت زیر محاسبه کرد. $S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB\times BC\times \sin B$ یا $S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AC\times BC\times \sin C$ یا $S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB\times AC\times \sin A$



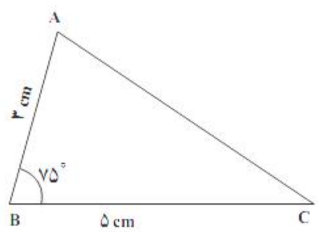
مثال: مساحت مثلث زیر را به دست آورید.



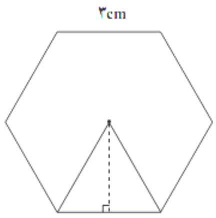
مثال: مساحت مثلث ABC را به دست آورید.



مثال: فرض کنید $\sin ۷۵^\circ \simeq ۰/۹۶$، مساحت مثلث ABC در شکل زیر را به دست آورید.

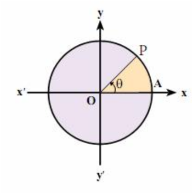


مثال: مساحت شش ضلعی منتظم زیر را حساب کنید.



درس دوم: دایره‌ی مثلثاتی

دستگاه محورهای مختصات و دایره‌ی به شعاع یک را به مرکز مبدا مختصات در نظر می‌گیریم. اگر نقطه‌ی P روی این دایره در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت کند، زاویه‌ی AOP مثبت و حرکت در جهت عقربه‌های ساعت، منفی است. چنین دایره‌ای را یک دایره‌ی مثلثاتی می‌نامیم.

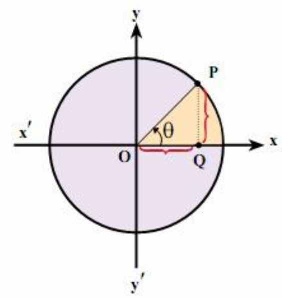


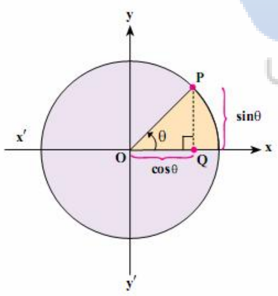
مثال: هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایره‌ی مثلثاتی مشخص کنید.

$۳۰^\circ , -۳۰^\circ , ۹۰^\circ , -۹۰^\circ , ۱۵۰^\circ , -۱۲۰^\circ , ۹۰^\circ , ۱۸۰^\circ , -۱۸۰^\circ$

نکته: فرض کنید نقطه‌ی $P(x,y)$ روی دایره‌ی مثلثاتی باشد و θ زاویه‌ی بین نیم‌خط $\vec{OP}$ و محور $\vec{OX}$ باشد. با توجه به شکل، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی θ به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$\sin\theta = y \quad , \quad \cos\theta = y \quad , \quad \tan\theta = \frac{y}{x} \quad , \quad \cot\theta = \frac{y}{x}$$





بنابر این در دایره‌ی مثلثاتی، محور xها را محور cosها و محور y را محور sinها می‌نامیم.

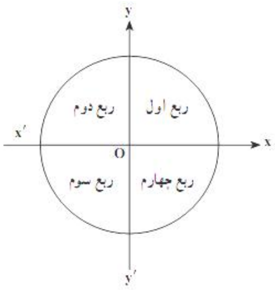
تکمیل جدول مقادیر نسبت‌های مثلثاتی

	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°
sin	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	−۱	۰
cos	۱	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	−۱	۰	۱
tan	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
cot	تعریف نشده	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

نکته: با توجه به دایره‌ی فوق، برای هر زاویه‌ی دلخواه مثل θ داریم: $-1 \le \sin\theta \le 1$ و $-1 \le \cos\theta \le 1$.

نکته: با توجه به دایره‌ی مثلثاتی که شعاع آن ۱ واحد است و همچنین رابطه‌ی فیثاغورس داریم: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

نکته: دو محور عمود بر هم $x'ox$ و $y'oy$، صفحه را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کند. هر یک از این قسمت‌ها را یک ناحیه یا یک ربع دایره‌ی مثلثاتی می‌نامیم.



علامت نسبت‌های مثلثاتی در هر کدام از ناحیه‌ها

با توجه به این که محور xها را محور $\cos$ها و محور y را محور $\sin$ها می‌نامیم، بنابراین، هرجه x مثبت باشد، $\cos$ نیز مثبت خواهد بود و هر جا x منفی باشد، $\cos$ نیز منفی خواهد بود. $\sin$ نیز با y هم‌علامت است. علامت $\tan$ و $\cot$ را نیز از ضرب علامت‌های $\sin$ و $\cos$ به دست می‌آوریم.

مقدار	ربع اول $x>0$, $y>0$	ربع دوم $x<0$, $y>0$	ربع سوم $x<0$, $y<0$	ربع چهارم $x>0$, $y<0$
$\sin$	+	+	−	+
$\cos$	+	−	−	−
$\tan$	+	−	+	−
$\cot$	+	−	+	−

مثال: اگر $\tan\theta$ و $\sin\theta$ هم‌علامت باشند، آن‌گاه θ در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟

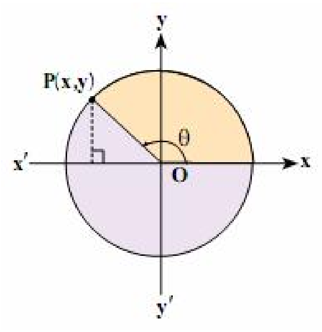
مثال: حدود زاویه‌ی θ را در هر یک از حالات زیر مشخص کنید.

۱) $\sin\theta > 0$, $\cos\theta < 0$ ۲) $\sin\alpha \times \cos\alpha > 0$

مثال: زاویه‌ای مثل α پیدا کنید به طوری‌که $\tan\alpha > \cot\alpha$.

مثال: زاویه‌ای مثل α پیدا کنید به طوری‌که $\cot\alpha > \tan\alpha$.

مثال: اگر $p(x,y)$ نقطه‌ای در ربع دوم دایره‌ی مثلثاتی باشد و θ، زاویه‌ی بین قسمت مثبت محور x ها و نیم‌خط $\vec{OP}$ باشد و داشته باشیم $\sin\theta = \frac{3}{4}$، مختصات نقطه‌ی P و همچنین سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی θ را به دست آورید. (رابطه‌ی فیثاغورث)



مثال: اگر $p(x,y)$ نقطه‌ای در ربع سوم دایره‌ی مثلثاتی باشد و θ، زاویه‌ی بین قسمت مثبت محور x ها و نیم‌خط $\overrightarrow{OP}$ باشد و داشته باشیم $\cos\theta = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$، مختصات نقطه‌ی P و همچنین سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی θ را به دست آورید. (رابطه‌ی فیثاغورث)

مثال: اگر $\cos\theta = -\frac{۲}{۳}$ باشد، زاویه‌ی θ در چه ناحیه‌ای می‌تواند قرار بگیرد؟

رابطه‌ی شیب خط با تانژانت زاویه

شیب هر خط که محور افقی را قطع می‌کند، برابر است با تانژانت زاویه‌ی بین آن دو خط و جهت مثبت محور افقی. به عبارت دیگر، اگر α زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، آن‌گاه: $\tan\alpha =$ شیب خط.

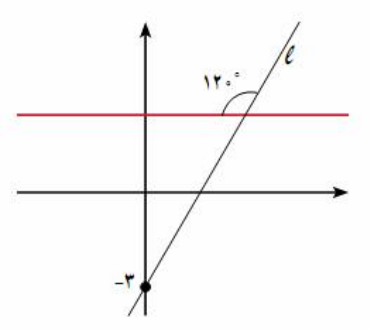
مثال: خط $y - x = ۳$ محور xها را با چه زاویه‌ای قطع می‌کند؟

مثال: اگر خط $۲x + ۳y = ۵$ محور افقی را با زاویه‌ی α قطع کند، $\tan\alpha$ را بیابید.

مثال: معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $(۲,۱)$ بگذرد و زاویه‌ی آن با محور xها ۶۰° باشد.

مثال: معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $(۰,۲)$ بگذرد و زاویه‌ی آن با محور xها ۴۵° باشد.

مثال: با توجه به شکل زیر، معادله‌ی خط l را بنویسید.



درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

$$۱)\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱ \Rightarrow \begin{cases} \sin^۲\theta = ۱ - \cos^۲\theta \Rightarrow \sin\theta = \pm\sqrt{۱-\cos^۲\theta} \\ \cos^۲\theta = ۱ - \sin^۲\theta \Rightarrow \cos\theta = \pm\sqrt{۱-\sin^۲\theta} \end{cases}$$

$$۲)\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad ۳)\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad ۴)\tan\theta \times \cos\theta = ۱$$

$$۵)۱ + \tan^۲\theta = \frac{۱}{\cos^۲\theta} \; ; \; (\cos\theta \neq ۰) \qquad ۶)۱ + \cot^۲\theta = \frac{۱}{\sin^۲\theta} \; ; \; (\sin\theta \neq ۰)$$

نکته: با داشتن هر یک از نسبت‌های مثلثاتی و ناحیه‌ای که انتهای زاویه‌ی θ در ان قرار دارد، می‌توان سایر نسبت‌های مثلثاتی را به دست آورد.

مثال: فرض کنید α زاویه‌ای در ناحیه‌ی دوم مثلثاتی باشد و $\cos\alpha = -\frac{۳}{۵}$. سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی α را به دست آورید.

مثال: فرض کنید α زاویه‌ای در ناحیه‌ی سوم مثلثاتی باشد و $\sin\alpha = -\frac{۳}{۵}$. سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی α را به دست آورید.

مثال: اگر $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد، آن‌گاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه‌ی 135° را به دست آورید.

مثال: اگر $\tan 240^\circ = \sqrt{3}$ باشد، آن‌گاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه‌ی 240° را به دست آورید.

مثال: فرض کنید $\tan\alpha = -\frac{4}{3}$ و α زاویه‌ای در ناحیه‌ی چهارم مثلثاتی باشد. سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی α را به دست آورید.

مثال: اگر $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ و $\tan\alpha = \frac{-3}{4}$، آن‌گاه سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی α را به دست آورید.

مثال: درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

$1)\ \sin^4\theta - \cos^4\theta = \sin^2\theta - \cos^2\theta$

$2)\ \frac{1}{\cos\alpha} + \cot\alpha = \frac{\tan\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha}$

$3)\ \sin^4\theta + \cos^4\theta = 1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta$

$4)\ (\frac{1}{\cos\theta} + \tan\theta)(1 - \sin\theta) = \cos\theta$

$5)\ \tan\theta + \cot\theta = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

$6)\ \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

$7)\ \frac{1}{\sin\theta} \times \tan\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

$8)\ 1 - \frac{\cos^2 x}{1+\sin x} = \sin x$

$9)\ \frac{1+\tan\alpha}{1+\cot\alpha} = \tan\alpha$

$10)\ \frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{\cos x}{1+\sin x}$

فصل ۳: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

درس اول: ریشه و توان

$۸ = ۲^۳$ به عدد ۲، ریشه‌ی سوم عدد ۸ می‌گوییم. بنابر این $\sqrt[۳]{۸} = ۲$.

نکته: هر عدد حقیقی فقط یک ریشه‌ی سوم دارد.

نکته: هر عدد حقیقی فقط یک ریشه‌ی فرد دارد.

$۲۵ = ۵^۲$ و $(-۵)^۲ = ۲۵$. به اعداد ۵ و -۵ ریشه‌های دوم عدد ۲۵ می‌گوییم.

نکته: هر عدد حقیقی مثبت دارای دو ریشه‌ی دوم است که قرینه‌ی یکدیگرند.

نکته: هر عدد حقیقی مثبت دارای دو ریشه‌ی زوج است که قرینه‌ی یکدیگرند.

نکته: اعداد حقیقی منفی، ریشه‌ی فرد دارند ولی ریشه‌ی زوج ندارند. به عنوان مثال عدد -۴ ریشه‌ی زوج ندارد.

نکته: از بین دو ریشه‌ی زوج هر عدد حقیقی مثبت مثل a، عدد مثبت را رادیکال عدد a می‌گوییم. بنابر این به عنوان مثال $\sqrt{۲۵} = ۵$ درست است و عبارت $\sqrt{۲۵} = -۵$ درست نیست.

مثال: ریشه‌ی سوم عدد ۲۷ و ریشه‌های دوم عدد ۳۶ و همچنین رادیکال ۳۶ را مشخص کنید.

مثال: ریشه‌ی پنجم اعداد ۳۲ و -۳۲ و ریشه‌ی سوم عدد $\frac{۱۲۵}{۱۰۰۰}$ را به دست آورید.

مثال: ابتدا مشخص کنید که اعداد رادیکالی زیر، بین کدام دو عدد صحیح متوالی هستند و سپس مقدار تقریبی‌آن‌ها را تا یک رقم اعشار به دست آورید.

$\sqrt[۳]{۲۵}$ $\sqrt{۱۰}$

$\sqrt[۵]{۱۶}$ $\sqrt[۳]{۷/۲۵}$

$\sqrt[۴]{۹۰}$ $\sqrt[۵]{۶۴}$

مثال: کدام یک از تساوی‌های زیر درست است؟

$\sqrt[۶]{(-۲)^۶} = -۲$ $\sqrt[۵]{۳^۵} = ۳$ $\sqrt[۴]{(-۳)^۴} = -۳$

$\sqrt[۶]{(-۲)^۶} = ۲$ $\sqrt[۵]{(-۳)^۵} = -۳$ $\sqrt[۴]{(-۳)^۴} = ۳$

درس دوم: ریشه‌ی nام

نکته: اگر n فرد باشد، در این صورت $\sqrt[n]{a^n} = a$.

نکته: اگر n زوج باشد، در این صورت $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.

مثال: با یک مثال نشان دهید رابطه‌ی $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n$ همواره درست نیست.

نکته: $(\sqrt[n]{a})^n = a$. (در صورتی که رادیکال با معنی باشد. یعنی اگر n زوج است مقدار a نباید منفی باشد)

نکته: اگر $a,b \geq ۰$ و n عدد طبیعی زوج باشد، آن‌گاه $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.

نکته: اگر a,b اعداد دلخواه و n عدد طبیعی فرد باشد، آن‌گاه $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.

مثال: مقادیر a و b و n را طوری انتخاب کنید که:

الف) تساوی $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ برقرار باشد.

ب) تساوی $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ برقرار نباشد.

نکته: رابطه‌ی $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a+b}$ درست نیست.

نکته: اگر $0<a<1$ و $m<n$ باشد، آن‌گاه: $\begin{cases} a^m>a^n \\ \sqrt[m]{a}<\sqrt[n]{a} \end{cases}$

مثال: اگر $0<a<1$ باشد، در □ یکی از علامت‌های > یا < را قرار دهید.

$\sqrt[5]{a}\,\square\,\sqrt[7]{a}$ $\qquad$ $a^3\,\square\,a^4$

درس سوم: توان‌های گویا

نکته: هرگاه $a>0$ باشد، برای هر دو عدد طبیعی m و n، توان کسری و غیر صحیح $\frac{m}{n}$ را برای a چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

به عنوان مثال $3^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{3^2}$

نکته: برای هر عدد طبیعی $n\geq 2$، توان $\frac{1}{n}$ عدد مثبت a را چنین تعریف می‌کنیم: $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$.

به عنوان مثال $5^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{5}$

نکته: اگر $a<0$ باشد، در این صورت $a^{\frac{1}{n}}$ تعریف نمی‌شود. به عنوان مثال عبارت‌های مثل $(-3)^{\frac{1}{5}}$ و $(-1)^{\frac{2}{3}}$ تعریف نمی‌شوند.

نکته: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=a^{\frac{1}{mn}}$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

۱) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$ $\qquad$ ۲) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$ $\qquad$ ۳) $\sqrt{\sqrt{81}}$

نکته: اگر r و s دو عدد گویا باشند و $a>0$، قواعد توان برای اعداد گویا مانند اعداد صحیح برقرار بوده و داریم:

۱) $a^r\times a^s=a^{r+s}$

۲) $(a^r)^s=a^{rs}$

۳) $(ab)^r=a^r\times s^r$

درس چهارم: عبارت‌های جبری

یادآوری و تکمیل اتحادهای جبری

۱) $\begin{cases}(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\\(a-b)^2=a^2-2ab+b^2\end{cases}$ اتحاد مربع دوجمله‌ای

۲) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ اتحاد مربع سه‌جمله‌ای

۳) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ اتحاد مزدوج

۴) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ اتحاد یک‌جمله‌ی مشترک

۵) $\begin{cases}(a+b)^{۳}=a^{۳}+۳a^{۲}b+۳ab^{۲}+b^{۳}\\(a-b)^{۳}=a^{۳}-۳a^{۲}b+۳ab^{۲}+b^{۳}\end{cases}$ اتحاد مکعب دوجمله‌ای

۶) $\begin{cases}(a+b)(a^{۲}-ab+b^{۲})=a^{۳}+b^{۳}\\(a-b)(a^{۲}+ab+b^{۲})=a^{۳}-b^{۳}\end{cases}$ اتحاد چاق و لاغر

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را با استفاده از اتحادها بنویسید.

۱) $(x-۵)^{۲}$

۲) $(۲x+x^{۳})^{۲}$

۳) $(x+\frac{۱}{x})^{۲}$

۴) $(x-\sqrt{x})^{۲}$

۵) $(\frac{x}{۲}+۵x)^{۲}$

۶) $(۲x-۳y)^{۲}$

۷) $(۲x-x^{۲}+۱)^{۲}$

۸) $(\frac{x}{۲}+۲x^{۲}-x^{۳})^{۲}$

۹) $(۵x-۲y)(۵x+۲y)$

۱۰) $(۱-\frac{۱}{x})(۱+\frac{۱}{x})$

۱۱) $(۴x^{۲}+y^{۳})(۴x^{۲}-y^{۳})$

۱۲) $(۳y+۵)(۳y-۲)$

۱۳) $(x^{۲}-۵)(x^{۲}-۶)$

۱۴) $(۲x+۱)^{۳}$

۱۵) $(x^{۲}-۳)^{۳}$

۱۶) $(x+۲y)(x^{۲}-۲xy+۴y^{۲})$

۱۷) $(x-\frac{۱}{x})(x^{۲}+۱+\frac{۱}{x^{۲}})$

۱۸) $(\sqrt[۳]{x}+۱)(\sqrt[۳]{x^{۲}}-\sqrt[۳]{x}+۱)$

۱۹) ۱۴×۱۶

۲۰) $۱۰۵^{۲}$

۲۱) $۱۰۰۷^{۲}$

۲۲) $۹۸^{۲}$

تجزیه

در تجزیه‌ی عبارت‌های جبری، معمولا به یکی از روش‌های زیر عمل می‌کنیم.

۱. روش فاکتورگیری

۲. با استفاده از اتحادهای

۳. به روش دسته‌بندی

مثال: عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

۱) $x^{۲}+۶x$

۲) $x(a+b)-۲(a+b)$

۳) $\frac{x^{۲}}{۳}-۷x$

۴) $۶a^{۲}b^{۳}-۸ab^{۴}$

۵) $x^{۲}-۱۰x+۲۵$

۶) $۴x^{۲}+۱۲xy+۹y^{۲}$

۷) $x^{۴}-۲x+\frac{۱}{x^{۲}}$

۸) $x+۴\sqrt{x}+۴$

۹) $۹y^{۲}-x^{۴}$

۱۰) $\frac{x^{۲}}{y^{۴}}-\frac{۱}{x^{۲}}$

۱۱) $a^{۲}b^{۶}-۱$

۱۲) $x^{۴}-۱۶$

۱۳) $x^{۳}-۹x$

۱۴) $x^{۲}-۷x+۱۰$

۱۵) $x^{۲}-۷x+۶$

۱۶) $y^{۲}-۹y+۲۰$

۱۷) $x^{۳}-۸$

۱۸) $y^{۶}-x^{۳}$

۱۹) $۱-۲۷y^{۹}$

۲۰) $۸x^{۳}+۶۴y^{۳}$

۲۱) $a^{۳}-۲ab+a^{۲}b-۲b^{۲}$

۲۲) $۲x^{۲}+۳x+۱$

۲۳) $a^{۶}-۲b^{۶}+۲a^{۳}b^{۳}$

شمارنده‌های یک عدد (مقسوم علیه‌های یک عدد)

شمارنده‌ی هر عدد صحیح مثل n برابر است با اعدادی که عدد n بر آن‌ها بخش‌پذیر باشد.

مثال: تمام شمارنده‌های مثبت عدد ۱۲ را بنویسید.

نکته: شمارنده‌های یک چندجمله‌ای نیز مشابه شمارنده‌های یک عدد تعریف می‌شود.

نکته: برای تعیین شمارنده‌های یک چندجمله‌ای با ید ابتدا آن را تجزیه کنیم.

مثال: شمارنده‌های عبارت $x^{۲}-y^{۲}$ را بنویسید.

مثال: شمارنده‌های عبارت $x^{۲}-۵x$ را بنویسید.

مثال: شمارنده‌های عبارت $x^{۳}+۱۲۵$ را بنویسید.

مضرب‌های یک عبارت جبری یا چندجمله‌ای

مضرب هر عبارت جبری یا چندجمله‌ای از ضرب آن عبارت در عددهای صحیح و یا عبارت‌های جبری دیگر (و یا همزمان در هر دو) به دست می‌آید.

به عنوان مثال چند تا از مضرب‌های $a+۲$ عبارت است از $۳(a+۲)$، $x(x+۲)$، $۵(y-۳)(a+۲)$ و $(a-۵)(a+۲)^{۲}$.

مثال: عبارت $۲۷a^{۳}-۱$ مضرب کدام یک از عبارت‌های زیر است؟

۱) $a-۱$ ۲) $۳a-۱$ ۳) $۹a^{۲}+۳a+۱$ ۴) $۳a+۱$

عبارت‌های گویا: عبارت‌های کسری که در آن‌ها صورت و مخرج چندجمله‌ای باشند، عبارت گویا نامیده می‌شوند.

مثال: کدام یک از عبارت‌های زیر گویاست؟

۱) $\dfrac{x^{۳}-۱}{x^{۲}+۱}$ ۲) $\dfrac{۴x+\sqrt{۵}}{x^{۲}}$ ۳) $\sqrt[۵]{x}-۴$ ۴) $\sqrt[۳]{x^{۲}}+۴x-۲$

نکته: یک عبارت گویا به ازای مقادیری از متغیر که مخرج آن صفر می‌شود، تعریف نمی‌شود. (به عبارت دیگر برای تعیین دامنه‌ی تعریف یک عبارت گویا، باید ریشه‌های مخرج را از اعداد حقیقی کم کنیم)

مثال: عبارت‌های گویای زیر به ازای چه مقدارهایی از x تعریف نمی‌شود؟

۱) $\dfrac{۲x}{x-۳}$ ۲) $\dfrac{-x+۱}{(x-۲)(۲x-۳)}$ ۳) $\dfrac{-۴}{x^{۲}+۵x}$ ۴) $\dfrac{۲x^{۲}}{x^{۲}-۶x+۵}$

۵) $\dfrac{۱}{x-۲}-\dfrac{x}{x+۳}$ ۶) $\dfrac{۲x+۱}{x}-\dfrac{۳}{x^{۲}-۹}$ ۷) $\dfrac{۱}{x-۱}+\dfrac{۱}{x+۱}-\dfrac{۱}{x^{۲}+۴}$

۸) $\dfrac{x-۱}{x^{۲}+۱}-\dfrac{۱}{x}+۵$

ساده کردن عبارت‌های گویا

برای ساده کردن عبارت‌های گویا ابتدا صورت و مخرج را در صورت امکان تجزیه می‌کنیم و سپس عامل‌های مشترک در صورت و مخرج را باهم خط می‌زنیم.

مثال: عبارت‌های زیر را ساده کنید.

۱) $\dfrac{x^2-4}{x^2+2x}$ ۲) $\dfrac{x^2-5x-14}{x^2-49}$ ۳) $\dfrac{12x^2y^3z}{18xy^5}$ ۴) $\dfrac{x^2+1}{x^4-1}$

۵) $\dfrac{x^3-8}{(x-2)^3}$ ۶) $\dfrac{x^6+1}{x^4+2x^2+1}$ ۷) $\dfrac{y^7-y}{y^3+y^2+y}$ ۸) $\dfrac{y^5-y^3-12y}{8y^2+16y}$

گویا کردن مخرج‌های گنگ

اگر مخرج یک کسر، گنگ باشد، بهتر است آن را از حالت گنگ خارج کنیم.

مثال: مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

۱) $\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ ۲) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}$ ۳) $\dfrac{2x+1}{5\sqrt{x}}$ ۴) $\dfrac{2x}{\sqrt[3]{x+1}}$

۵) $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ ۶) $\dfrac{2}{\sqrt{x+3}}$ ۷) $\dfrac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ ۸) $\dfrac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

۹) $\dfrac{3}{2\sqrt{x}-1}$ ۱۰) $\dfrac{2y}{3\sqrt{y}+2\sqrt{x}}$ ۱۱) $\dfrac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{\sqrt{y}+\sqrt{x}}$ ۱۲) $\dfrac{x-1}{x-2\sqrt{x}}$

۱۳) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-1}$ ۱۴) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+2}$ ۱۵) $\dfrac{x-y}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}$ ۱۶) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+5}-\dfrac{2}{3-\sqrt{x}}$

۱۷) $\dfrac{5}{\sqrt[4]{x}-1}$ ۱۸) $\dfrac{1}{\sqrt[8]{x}-1}$

جمع و تفریق عبارت‌های کسری

برای جمع و تفریق عبارت‌های کسری از مخرج مشترک استفاده می‌کنیم.

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

۱) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x+3}$ ۲) $\dfrac{4}{x-1}+\dfrac{2}{x+1}$ ۳) $\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{3}{\sqrt{x}+2}$

۴) $\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x+3}+\dfrac{3}{x-1}$ ۵) $\dfrac{x+2}{x-2}-\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{8}{x^2-4}$ ۶) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{3}{x^2-1}-\dfrac{x-2}{x+1}$

۷) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}+\dfrac{1}{x-1}$ ۸) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{2}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{3}{x-1}$

فصل ٤: معادلات و نامعادلات

درس اول: معادله‌ی درجه‌ی دوم و روش‌های مختلف حل آن

❊ هر معادله که پس از ساده شدن، بزرگ‌ترین توان متغیر آن ۲ باشد، معادله‌ی درجه‌ی دوم نامیده می‌شود.

❊ هر معادله به شکل $(a \neq 0)$, $ax^2+bx+c=0$ را که در آن a، b و c اعداد حقیقی هستند، یک معادله‌ی درجه‌ی دوم نامیده می‌شود. مثل: $-x^2=5x$ $\quad$ $x^2-6=0$ $\quad$ $-2x^2-4x+2=0$

روش‌های حل معادله‌ی درجه‌ی دوم

۱. تجزیه $\qquad$ ۲. ریشه‌ی زوج $\qquad$ ۳. مربع کامل $\qquad$ ۴. روش کلی (روش دلتا)

۱. روش تجزیه

در این روش، ابتدا تمام جملات را به یک طرف انتقال می‌دهیم تا طرف دیگر صفر شود. سپس عبارت را تجزیه کرده و هر یک از عامل‌ها را مساوی صفر قرار داده و حل می‌کنیم.

مثال: معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید.

۱) $x^2-5x=0$ $\qquad$ ۲) $x^2=-7x$ $\qquad$ ۳) $2x^2-6x=0$ $\qquad$ ۴) $x^2-7x=-10$

۵) $x^2+x-20=0$ $\qquad$ ۶) $9-6z+z^2=0$ $\qquad$ ۷) $4x^2-25=0$ $\qquad$ ۸) $x^2(x-5)-4(x-5)=0$

۹) $x^3+4x^2=12x$ $\qquad$ ۱۰) $x^3=81x$ $\qquad$ ۱۱) $x^2-\frac{x}{3}=0$ $\qquad$ ۱۲) $\frac{x^2}{4}-1=0$

۱۳) $5t^2=20$ $\qquad$ ۱۴) $4k^2-12k+8$ $\qquad$ ۱۵) $5a^2-7a=2a(a-3)$

۲. ریشه‌ی زوج

اگر معادله‌ی درجه‌ی دوم، جمله‌ی درجه‌ی اول نداشته باشد، ابتدا معادله را معلوم و مجهول کرده و با گرفتن رادیکال از طرفین، یک بار با علامت مثبت و یک بار نیز با علامت منفی، جواب‌های معادله را به دست می‌آوریم.

مثال: معادلات زیر را به روش ریشه‌ی زوج حل کنید.

۱) $x^2-4=0$ $\qquad$ ۲) $4x^2-25=0$ $\qquad$ ۳) $(x-1)^2-9=0$ $\qquad$ ۴) $(5x-4)^2-9=0$

۵) $5-x^2=0$ $\qquad$ ۶) $x^2+5=0$ $\qquad$ ۷) $5r^2=45$ $\qquad$ ۸) $(t-2)^2=16$

۹) n^2-226 $\qquad$ ۱۰) $3-3a=3a(2a-1)$

۳. مربع کامل

برای حل معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$، معادله را طوری ساده می‌کنیم که ضریب x^2 برابر با ۱ باشد. سپس جمله‌های مجهول را به یک طرف و جمله‌ی ثابت را به طرف دیگر منتقل می‌کنیم. سپس مربع نصف ضریب جمله‌ی درجه‌ی اول را به طرفین اضافه کرده و طرف اول را با اتحاد اول تجزیه کرده و طرف دوم را نیز ساده می‌کنیم و در نهایت به روش ریشه‌ی زوج جواب‌ها را به دست می آوریم.

مثال: معادلات زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

۱) $x^2-8x=-12$ $\qquad$ ۲) $x^2+2x-8=0$ $\qquad$ ۳) $x^2+6x=-8$ $\qquad$ ۴) $x^2-10x+21=0$

۵) $x^2+5x-14=0$ $\qquad$ ۶) $-x^2-5x=-24$ $\qquad$ ۷) $2t^2+t-2=0$ $\qquad$ ۸) $r^2+3r=3$

۹) $s^2-3s+3=0$ $\qquad$ ۱۰) $2a^2+5a-3=0$

۴. روش کلی (روش دلتا):

در این روش برای حل معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ ابتدا ضرایب a، b و c را مشخص کرده و سپس دلتا را طبق فرمول $\Delta=b^۲-۴ac$ محاسبه می‌کنیم که بر حسب علامت دلتا، یکی از سه حالت زیر اتفاق می‌افتد.

۱) $\Delta>۰$. در این حالت معادله دو جواب حقیقی دارد که با فرمول‌های مقابل تعیین می‌شوند: $\begin{cases} x_۱=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} \\ x_۲=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a} \end{cases}$

۲) $\Delta=۰$. در این حالت معادله یک ریشه حقیقی دارد. (ریشه مضاعف) که از رابطه‌ی مقابل تعیین می‌شود. $x_۰=-\dfrac{b}{a}$

۳) $\Delta<۰$. در این حالت معادله‌ی ریشه‌ی حقیقی ندارد.

مثال: معادلات زیر را به روش کلی (دلتا) حل کنید.

$۱)\,۲x^۲-۵x+۳=۰$ $\quad ۲)\,x^۲-۶x=-۹$ $\quad ۳)\,۴x^۲-۳x-۱=۰$ $\quad ۴)\,-۲x^۲+۷x-۳=۰$

$۵)\,۲x^۲-۷x+۵=۰$ $\quad ۶)\,x^۲-x+۱=۰$ $\quad ۷)\,-۲x^۲+x+۳=۰$ $\quad ۸)\,-x^۲+۴x-۴=۰$

$۹)\,r-r^۲=۳$ $\quad ۱۰)\,a^۲+۲\sqrt{۳}a=۹$ $\quad ۱۱)\,\dfrac{x^۲}{۳}-\dfrac{x}{۲}-\dfrac{۳}{۲}=۰$

مثال: طول یک مستطیل ۳ سانتی‌متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۴۵ سانتی‌متر باشد، ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.

مثال: می‌خواهیم با استفاده از یک رشته سیم به طول ۵۰ متر، یک مستطیل به مساحت ۱۴۴ متر مربع بسازیم. طول و عرض این مستطیل را مشخص کنید.

مثال: اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۴ سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل ضرب سن آن‌ها ۶۰ شود، سن هر کدام چه قدر است؟

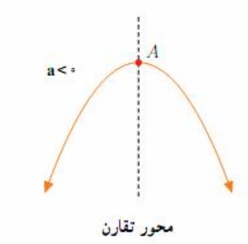
مثال: یک عکس به اندازه‌ی ۱۰ در ۱۵ سانتی‌متر درون قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی‌متر مربع قرار دارد. اگر فاصله‌ی همه‌ی لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید.

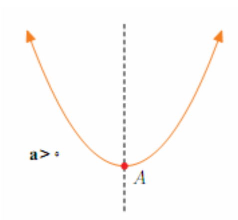
مثال: مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی ۲۹۰ است. این دو عدد را پیدا کنید.

مثال: در یک لیگ والیبال، ۴۵ بازی انجام شده است. اگر هر تیم با دیگر تیم‌های لیگ، فقط یک بازی انجام داده باشد، تعداد تیم‌های این لیگ را به دست آورید.

درس دوم: سهمی

نمودار هر معادله به شکل $y=ax^۲+bx+c$ را که در آن a و b و c اعداد حقیقی هستند و $a\neq ۰$، یک سهمی می‌گوییم که حالت کلی آن به یکی از صورت‌های زیراست.





راس سهمی: نقطه‌ی A را در شکل‌های مقابل راس سهمی می‌گوییم.

نکته: اگر $a > ۰$ باشد، A پایین‌ترین نقطه‌ی سهمی یا مینیمم سهمی $(\min)$ و اگر $a < ۰$ باشد، A بالاترین نقطه‌ی سهمی یا ماکزیمم $(\max)$ نامیده می‌شود.

محور تقارن سهمی: خط عمودی که از راس سهمی می‌گذرد، محور تقارن سهمی نامیده می‌شود.
نکته: معادله‌ی هر سهمی در حالت کلی می‌تواند به یکی از صورت‌های زیر باشد:
۱) $y = ax^۲ + bx + c \;,\; a \neq ۰$ که در این صورت:
مرکز سهمی به صورت $(\frac{-b}{۲a}, \frac{-\Delta}{۴a})$ و معادله‌ی محور تقارن آن به صورت $x = \frac{-b}{۲a}$ خواهد بود.
۲) $y = a(x-h)^۲ + k \;,\; a \neq ۰$ که در این صورت:
مرکز سهمی به صورت (h,k) و معادله‌ی محور تقارن آن به صورت $x = h$ خواهد بود.

نکته: برای رسم سهمی به روش نقطه‌یابی، ابتدا مختصات راس و سپس یک نقطه قبل و یک نقطه بعد از راس را با یک فاصله پیدا کرده و سه نقطه را به صورت منحنی به هم وصل کرده و از هر دو طرف ادامه می‌دهیم.
مثال: مختصات راس و معادله‌ی محور تقارن هر یک از سهمی‌های زیر را پیدا کرده و نمودار آن‌ها را رسم کنید.

۱) $y = (x-۲)^۲ - ۱$ ۲) $y = (x-۱)^۲ + ۳$ ۳) $y = -(x+۲)^۲ - ۳$ ۴) $y = -(x+۲)^۲$

۵) $y = x^۲ - ۲$ ۶) $y = x^۲ - ۴x + ۵$ ۷) $y = ۲x^۲ - ۴x + ۵$ ۸) $y = -۲x^۲ + ۱$

۹) $y = \frac{x^۲}{۲} + ۱$ ۱۰) $y = ۳x^۲ - ۲$ ۱۱) $y = x - x^۲$ ۱۲) $y = \frac{x^۲}{۲} + x - ۴$

مثال: اگر $(-۲,۵)$ و $(۰,۵)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن این سهمی را به دست آورید.
مثال: نمودار تابعی، یک سهمی است که از نقاط $(۲-,۱)$ و $(۳-,۲)$ می‌گذرد و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. نمایش جبری این تابع را بیابید.
مثال: نمودار سهمی $y = ax^۲ + bx + c$، محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ و محور x ها را در نقاط به طول ۱− و ۲ قطع کرده است. معادله‌ی این سهمی را بنویسید.
مثال: در سهمی $y = ax^۲ + bx - ۲$ مقادیر a و b را چنان بیابید که نمودار سهمی از نقطه‌ی $(-۱,۲)$ گذشته و محور xها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع کند.
مثال: اگر $y = ax^۲ + bx + c$ ، مقادیر a ، b و c را طوری بیابید که سهمی محور xها را در نقطه ای به طـول ۲ و محور عرضها را در نقطه ای به عرض ۱− قطع کند و از نقطه‌ی $(۳,۱)$ بگذرد .
مثال: در سهمی $y = ax^۲ + bx + ۱$ ، مقادیر a و b را طـوری تعیـین کنیـد تـا نمـودار سـهمی از نقطـه‌ی $(۱,۱)$ گذشته و محور xها را در نقطه ای به طول ۱− قطع کند.
مثال: منحنی های به معادلات $y = x^۲ + ax - ۳b$ و $y = -x + b$ داده شده اند، a و b را محاسبه کنید به طوری که نمودارهای این دو تابع روی محور x در نقطه ای به طول ۱− همدیگر را قطع کنند.
مثال: a و b را طوری محاسبه کنید که نمودار دو تابع $y = ax^۲ + x + b$ و $y = x + ۳a$ یکدیگر را روی محور عرض‌ها به عرض ۱− قطع کنند.

مثال: اگر $y=ax^2+bx+c$ باشد، a، b و c را طوری بیابید که سهمی محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ و محور xها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع کند و از نقطه‌ی $A(2,3)$ نیز بگذرد.

مثال: دو پرتابگر وزنه در یک مسابقه‌ی ورزشی، وزنه‌های خود را با زاویه‌های متفاوت α و β که $\alpha<\beta$ است، پرتاب کرده‌اند. پرتابگر A، زاویه ی α را انتخاب می‌کند و مسیر طی شده از رابطه‌ی $y=-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}x+2$ به دست می‌آید. پرتابگر B، نیز زاویه‌ی β را انتخاب می‌کند و مسیر طی شده از رابطه‌ی $y=-2x^2+3x+2$ به دست می آید. در هر دو معادله، y ارتفاع وزنه از سطح زمین و x مسافت افقی طی شده بر حسب متر است.

الف) مسیر حرکت هر کدام از وزنه‌ها را رسم کنید.

ب) محل برخورد وزنه‌ها با زمین یا محور xها در چه نقاطی است؟ کدام یک از وزنه‌ها مسافت افقی بیشتری را طی کرده است؟

پ) کدام یک از وزنه‌ها ارتفاع بیشتری از سطح زمین پیدا کرده است؟ اندازه‌ی آن‌ها را مشخص کنید.

درس سوم: تعیین علامت

منظور از تعیین علامت یک عبارت، این است که مشخص کنیم آن عبارت به ازای چه مقادیری، مثبت و به ازای چه مقادیری، صفر و به ازای چه مقادیری، منفی است.

مثال: در یک شرکت تولیدی، سود حاصل، از رابطه‌ی $p(x)=5x-200$ به دست می‌آید که در آن x تعداد کالای تولید شده است. مشخص کنید که این شرکت چه مقدار تولید کند سود می‌کند و چه مقدار تولید کند ضرر می‌کند و به ازای چه مقدار از تولید نه سود و نه زیان می‌کند.

تعیین علامت چندجمله‌ای درجه‌ی اول

برای تعیین چندجمله‌ای درجه‌ی اول $y=ax+b$، ابتدا آن عبارت را مساوی صفر قرار داده و جواب معادله را به دست می آوریم و سپس علامت آن را مطابق جدول زیر تعیین می‌کنیم.

$$ax+b=0\Rightarrow ax=-b\Rightarrow x=\frac{-b}{a}$$

x		$\frac{-b}{a}$	
$p(x)$	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

تعیین علامت چندجمله‌ای درجه‌ی دوم

در این حالت، عبارت درجه‌ی دوم داده شده را مساوی صفر قرار داده و معادله را حل می‌کنیم. بر حسب تعداد ریشه‌های معادله، یکی از سه حالت زیر اتفاق می‌افتد

۱. معادله دارای دو ریشه‌ی x_1 و x_2 باشد. $(x_1<x_2)$؛ به عبارت دیگر دلتا مثبت باشد. در این حالت علامت چندجمله‌ای به صورت زیر خواهد بود.

x		x_1		x_2	
$p(x)$	موافق علامت a	۰	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

۲. معادله دارای ریشه‌ی مضاعف $x_۰$ باشد؛ به عبارت دیگر دلتا صفر باشد. در این حالت علامت چندجمله‌ای به صورت زیر خواهد بود.

x		$x_۰$	
$p(x)$	موافق علامت a	۰	موافق علامت a

۳. معادله ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد؛ به عبارت دیگر دلتا منفی باشد. در این حالت علامت چندجمله‌ای به صورت زیر خواهد بود.

x	
$p(x)$	موافق علامت a

نکته: اگر عبارت به صورت حاصل‌ضرب یا تقسیم چندجمله‌ای‌های درجه‌ی اول یا دوم باشد، علامت تمام آن‌ها را در یک جدول مشخص کرده و در نهایت علامت‌ها را در هم ضرب می‌کنیم. دقت می‌کنیم که عبارت به ازای ریشه‌های مخرج تعریف نشده خواهد بود.

نکته: در تعیین علامت $(p(x))^{۲n}$، یعنی در حالتی که توان بیرون پرانتز زوج باشد، فقط پایه را مساوی صفر قرار داده و ریشه‌های معادله را به دست می‌آوریم و در جدول بجز ریشه‌ها، در تمام قسمت‌ها مثبت قرار می دهیم.

نکته: در تعیین علامت $(p(x))^{۲n-۱}$، یعنی در حالتی که توان بیرون پرانتز فرد باشد، مانند تعیین علامت $p(x)$ عمل می‌کنیم.

نکته: در تعیین علامت $|p(x)|$، مانند تعیین علامت $(p(x))^{۲n}$ عمل می‌کنیم.

مثال: عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

۱) $A=۲x-۶$

۲) $B=-۴x+۵$

۳) $C=(۴x+۱)(۲-x)$

۴) $D=\dfrac{x-۱}{۵-۲x}$

۵) $E=\dfrac{(x-۵)(-۲x+۱)}{x(x-۱)^۲}$

۶) $p=-۲x(۲x+۳)(x^۲-۴)$

۷) $p=(x-۲)^۷(۲x+۹)^{۱۲}$

۸) $p=\dfrac{|x-۲|(-۲x+۶)}{x^۲(x+۱)}$

۹) $F=-x^۲(۵x-۱)^۳$

۱۰) $p=۲x^۲+۳x-۵$

۱۱) $p=-۶x^۲+۴x-۱$

۱۲) $p=-x^۲+۶x-۹$

۱۳) $p=-x^۲+۱۰x-۹$

۱۴) $p(x)=\dfrac{x^۳(x-۳)^۲}{x^۲+x-۲}$

۱۵) $P(x)=(x^۲-۹)(x^۲+۴)(۳x-۱)$

۱۶) $p(x)=\dfrac{-x^۲+۱۰x-۲۵}{x^۲+x+۳}$

نامعادله

برای حل نامعادله به یکی از روش‌های زیر عمل می‌کنیم.

۱. روش هندسی: در این حالت با استفاده از رسم نمودار جواب‌های معادله را به دست می‌آوریم.

مثال: معادلات زیر را به روش هندسی حل کنید.

۱) $2x-8>-2$ ۲) $x^2\le 4$ ۳) $x^2-2x\le 3$

۴) $3x^2-x-2>0$

۲. روش جبری: این حالت به دو قسمت تقسیم می‌شود:

الف) نامعادله درجه‌ی اول باشد: در این حالت با معلوم و مجهول کرده نامعادله را حل می‌کنیم.

مثال: نامعادلات زیر را حل کنید.

۱) $4x-3>2$ ۲) $5x-1\le 3x-7$ ۳) $\begin{cases}3x-1\le 8\\ 3x-1>-2\end{cases}$

۴) $\dfrac{4-2x}{3}<0$ ۵) $-3<\dfrac{3x+1}{2}<2$ ۶) $-1<-3x+2<5$

۷) $-1\le\dfrac{x-1}{3}<2$ ۸) $-\dfrac{1}{2}<2-2x<x-1$ ۹) $0<-x+1\le 2$

۱۰) $x(x^2+1)<0$ ۱۱) $x+1\le 5-x<2x+3$

ب) نامعادله به صورت کسری یا درجه‌ی دوم یا درجات بالاتر باشد: در این حالت از جدول تعیین علامت استفاده می‌کنیم.

مثال: نامعادلات زیر را حل کنید.

۱) $\dfrac{4-2x}{3x+1}\ge 0$ ۲) $\dfrac{x^2-9}{2x+1}\ge 0$ ۳) $\dfrac{x+1}{x-1}\ge\dfrac{x}{x+1}$

۴) $\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{x}{x-1}\le 2$ ۵) $1-\dfrac{1}{x}<x+1$ ۶) $\dfrac{6-x^2}{x}>1$

۷) $\dfrac{x^2-6x+12}{x+6}\le 1$ ۸) $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x-1}{x}\ge -1$ ۹) $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{6}{x+1}\ge\dfrac{14}{x^2-2x-3}$

۱۰) $x-2\ge\dfrac{2x-1}{x+2}$ ۱۱) $x<\dfrac{4x-3}{x}<x+2$ ۱۲) $\dfrac{x^3-x}{x^2-2x+2}<0$

مثال: یک جسم از بالای یک ساختمان که ۱۳ متر ارتفاع دارد، به هوا پرتاب می‌شود. اگر ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیه‌ی tام از رابطه‌ی $h=-5t^2+18t+13$ محاسبه شود، در چه فاصله‌ی زمانی، ارتفاع توپ از سطح زمین بیشتر از ۱۳ متر خواهد بود؟

مثال: تعداد ضربان قلب، پس از x دقیقه کار سنگین بدنی، طبق رابطه‌ی $y=\dfrac{15}{8}x^2-30x+200$ به دست می‌آید. در چه زمان‌هایی پس از یک کار سنگین بدنی، تعداد ضربان قلب از ۱۱۰ بیشتر است؟ آیا تمام جواب‌های به دست آمده قابل قبول‌اند؟

نکته: چندجمله‌ای درجه‌ی دوم $p(x) = ax^۲ + bx + c$:

۱. همواره دو ریشه‌ی حقیقی دارد اگر $\Delta > ۰$.

۲. ریشه‌ی مضاعف دارد اگر $\Delta = ۰$

۳. ریشه‌ی حقیقی ندارد اگر $\Delta < ۰$.

۴. همواره مثبت است اگر $\begin{cases} \Delta < ۰ \\ a > ۰ \end{cases}$.

۵. همواره منفی است اگر $\begin{cases} \Delta < ۰ \\ a < ۰ \end{cases}$.

مثال: به ازای چه مقادیری از m، عبارت $y = x^۲ + mx + ۱$ همواره مثبت است؟

مثال: حدود m را چنان بیابید که عبارت $۲mx^۲ + x + ۱$ به ازای جمیع مقادیر x مثبت باشد.

مثال: حدود k را چنان بیابید که عبارت $۲kx^۲ + ۵x - ۱$ همواره منفی باشد.

مثال: مقادیر m را چنان بیابید که معادله‌ی $x^۲ + ۲mx + ۴ = ۰$ دارای ریشه‌ی مضاعف باشد.

مثال: حدود k را چنان بیابید که معادله‌ی $۲x^۲ + x + ۲k = ۰$ همواره دو ریشه‌ی حقیقی داشته باشد.

مثال: حدود m را چنان بیابید که معادله‌ی $x^۲ + mx - m - \frac{۳}{۴} = ۰$ همواره دارای دو ریشه‌ی حقیقی باشد.

مثال: حدود m را چنان بیابید که معادله‌ی $x^۲ + (m+۲)x + ۱ = ۰$ ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد.

نامعادلات قدر مطلقی: در حل نامعادلات قدر مطلقی از دو فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

فرض کنیم a یک عدد حقیقی مثبت و u یک عبارت جبری باشد. در این صورت:

۱. اگر $|u| \le a$ آن‌گاه $-a \le u \le a$.

۲. اگر $|u| \ge a$ آن‌گاه $u \ge a$ یا $u \le a$.

مثال: نامعادلات زیر را حل کنید.

$۱)\ |x| < ۳$
$۲)\ |x-۳| \le ۲$
$۳)\ |-۲x+۵| < ۲$

$۴)\ |۴x-۱| \le -۲$
$۵)\ |۲x-۱| > ۵$
$۶)\ |۵-۲x| \ge ۱$

$۷)\ \left|\frac{x}{۳}+۱\right| < \frac{۲}{۳}$
$۸)\ \left|\frac{x-۱}{۲}-۱\right| \ge ۳$
$۹)\ \left|\frac{۱-x}{۲x-۵}\right| > ۱$

فصل ۵: تابع

درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن

تعریف تابع: یک تابع از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A، دقیقا یک عضو از B نسبت داده می‌شود.

روش‌های نمایش تابع

توابع را می توان به یکی از صورت‌های زیر نمایش داد:

۱. به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب: یک مجموعه از زوج‌های مرتب وقتی نشان دهنده‌ی یک تابع است که در آن به ازای هر مولفه‌ی x فقط یک مولفه‌ی y وجود داشته باشد. (به عبارت دیگر اگر مولفه‌های اول برابر بودند، مولفه‌های دوم نیز برابر باشند)

۲. به صورت نمودار پیکانی: اگر اعضای دو مجموعه را توسط پیکان به هم مربوط کنیم، این رابطه وقتی نشان دهنده‌ی یک تابع است که در آن هر عضو مجموعه‌ی اول حدکثر به یک عضو از مجموعه‌ی دوم نظیر شود.(از هر عضو مجموعه‌ی اول حداکثر یک پیکان خارج شود)

۳. به صورت جدول: اگر اعضای مجموعه‌های x و y در یک جدول به هم نسبت داده شوند، آن‌گاه y را تابعی از x گوییم هرگاه به ازای هر x فقط یک y موجود باشد.

۴. به صورت نمودار: نمودار یک رابطه وقتی نشان‌دهنده‌ی یک تابع است که هر خط عمود بر محور xها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

۵. به صورت ضابطه (نمایش جبری): اگر رابطه‌ای بین دو متغیر x و y داشته باشیم، y را تابعی از x گوییم هرگاه به ازای هر x فقط یک y موجود باشد. (اگر $x_۱ \neq x_۲$ آن‌گاه $y_۱ \neq y_۲$ به عبارت دیگر $y_۱ = y_۲$ آن‌گاه $x_۱ = x_۲$)

مثال: $y = ۴x^۲ - ۳$ و $f(x) = ۲x + ۱$.

مثال: اگر $f(x) = ۵x - ۲$ باشد، مقادیر $f(۳)$ و $f(-۴)$ و $f(۰)$ و $f(\frac{۱}{۲})$ را بیابید.

مثال: برای اندازه‌گیری دما از واحدای سانتی‌گراد C و فارنهایت F استفاده می‌شود که با رابطه‌ی $F = \frac{۹}{۵}C + ۳۲$ به یکدیگر وابسته‌اند.

الف) -۲۰ درجه‌ی سانتی‌گراد، چند درجه‌ی فارنهایت است؟

ب) ۱۰۴ درجه‌ی فارنهایت، چند درجه‌ی سانتی‌گراد است؟

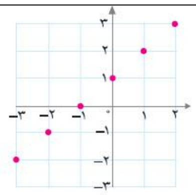
پ) معادله‌ای بنویسید که سانتی‌گراد را بر حسب فارنهایت به دست دهد.

مثال: کدام‌یک از رابطه‌های زیر، تابع هستند؟

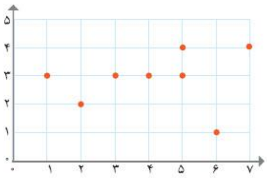
$f=\{(۲,۱),(۳,-۵),(۳,۷)\}$ $\quad$ $g=\{(۰,۱),(\frac{۳}{۵},۱),(-۵,۱),(۸,۱)\}$

$h=\{(۲,۳),(۳,۲),(۱,۱)\}$ $\quad$ $k=\{(۲,۵)\}$

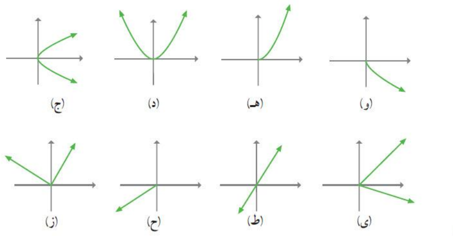
$r=\{(۲,۰),(-۷,۰)\}$ $\quad$ $l=\{(۱,۲),(۲,۴),(۳,۶),...\}$



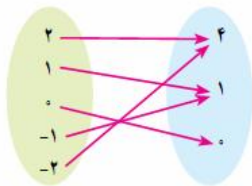
(الف)



(ب)



x	۱	۲	۳	۲
y	۸	۴	۶	۵



مثال: آیا خطوط $x=۲$ و $y=۳$ تابع اند؟

مثال: طول یک مستطیل ۵ برابر عرض ان است:

الف) تابعی بنویسید که مساحت این مستطیل را بر حسب تابعی از عرض آن بیان کند.

ب) تابعی بنویسید که محیط این مستطیل را بر حسب تابعی از عرض آن بیان کند.

مثال: تابعی بنویسید که طول قطر یک مربع را بر حسب طول ضلع آن بیان کند.

مثال: یک تانکر گاز، از یک استوانه و دو نیم‌کره به شعاع r در دو انتهای استوانه، تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه ۳۰ متر مربع باشد، حجم تانکر را بر حسب تابعی از r بنویسید.

مثال: اگر در تابع g داشته باشیم: $g(۴)=۳\ ,\ g(-۲)=\frac{۱}{۳}\ ,\ g(۱)=۵\ ,\ g(۰)=۲$، g را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید و نمودار ان را رسم کنید.

مثال: مقادیر a و b را چنان بیابید که رابطه‌ی $R=\{(۳,a+b),(-۱,۱۴),(۳,-۲),(-۱,۲a-b)\}$ یک تابع باشد.

مثال: اگر رابطه‌ی $f=\{(۲,۴),(۱,۵),(a-۱,۱),(۱,a^{۲}-۴)\}$ تابع باشد، مقدار a چقدر است؟

مثال: اگر رابطه‌ی $R=\{(۳,۲n-۱),(۳,۵),(۴,۶-۲m),(۴,۲p)\}$ یک تابع باشد و $۲p+m+n=۹$، مقدار p را به دست آورید.

مثال: اگر در تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۳}+۲x^{۲}+ax+b$، $f(۱)=۵$ و $f(-۲)=-۱$ باشد، مقدار $۳a-۲b$ را بیابید.

درس دوم: دامنه و برد یک تابع

* اگر یک تابع به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نشان داده شده باشد، به مجموعه‌ی همه‌ی مولفه‌های اول، دامنه و به مجموعه‌ی همه‌ی مولفه‌های دوم برد تابع می‌گوییم.

نکته: اگر عضوی در مجموعه‌ی دوم موجود باشد که به آن عضوی از مجموعه‌ی اول نظیر نشده باشد، آن عضو، متعلق به برد تابع نیست.

مثال: در مثال فوق برای توابعی که به صورت زوج مرتب و همچنین مجموعه‌ای از نقاط روی دستگاه مشخص شده‌اند، دامنه و برد را مشخص کنید.

٭ اگر y تابعی از x باشد که به صورت ضابطه مشخص شده باشد، مجموعه‌ی مقادیری که متغیر x می تواند اختیار کند، دامنه و مجموعه‌ی مقادیری که متغیر y می‌تواند اختیار کند، برد تابع نامیده می‌شود.

مثال: اگر تابعی با نمایش جبری $f(x)=۴x+۳$ داده شده باشد و دامنه‌ی آن $A=\{۲,۳,۵\}$ باشد، برد تابع را بیابید.

مثال: تابعی مثال بزنید که:

الف) دامنه‌ی آن تنها شامل دو عضو باشد.

ب) برد آن تنها از یک عضو تشکیل شده باشد.

پ) دامنه‌ی آن تنها شامل یک عضو باشد.

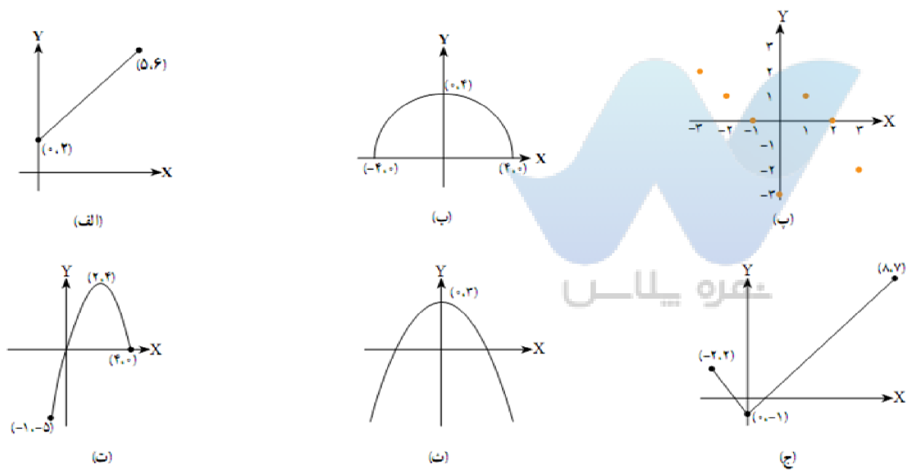
ت) دامنه‌ی آن نامتناهی باشد، ولی برد آن تنها یک عضو داشته باشد.

ث) دامنه و برد آن نامتناهی باشند.

مثال: نمودار توابعی را رسم کنید که دامنه‌ی آن $[۰,۲]$ و برد آن $[-۲,۱]$ باشد. چه تعداد از این‌گونه توابع می‌توان رسم کرد؟

مثال: دو تابع مثال بزنید که دامنه و برد آن‌ها یکی باشد ولی هیچ دو زوج مشترکی نداشته باشند.

مثال: نمودارهای زیر مربوط به چند تابع می‌باشد، دامنه و برد آن‌ها را به دست آورید.



مثال: اگر $\{(۲,x-۱),(y-۳,۳),(۵,۳),(۵,y-۲)\}=f$ تابع باشد، دامنه و برد f را به دست آورید.

تابع خطی: هر تابع که بتوان آن را به شکل $y=ax+b$ نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود. مثل: $y=-۲x+۳$ و $y=۵x$ و $y=۴$.

مثال: نمودار یک تابع خطی محور xها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند. اگر داشته باشیم $f(-۳)=۴$، معادله‌ی تابع را مشخص کنید.

مثال: اگر $f(x)=ax^{۲}+(a+b-۱)x+۲b$ تابعی خطی باشد و $f(۰)=۲$، مقادیر a و b را بیابید.

مثال: نمودار تابع خطی از نقاط $(۲,-۱)$ و $(۳,-۲)$ عبور می‌کند. نمایش جبری تابع f را به دست آورید.

مثال: برای یک تابع خطی داریم: $f(۲)=۱۱$ و $f(۰)=۷$، نمودار این تابع را رسم کنید و نمایش جبری آن را بنویسید.

مثال: نمودار یک تابع خطی از نقاط $(۴,۳)$ و $(۰,۳)$ می‌گذرد. مقادیر $f(-۴)$ و $f(-۱)$ را به دست آورید.

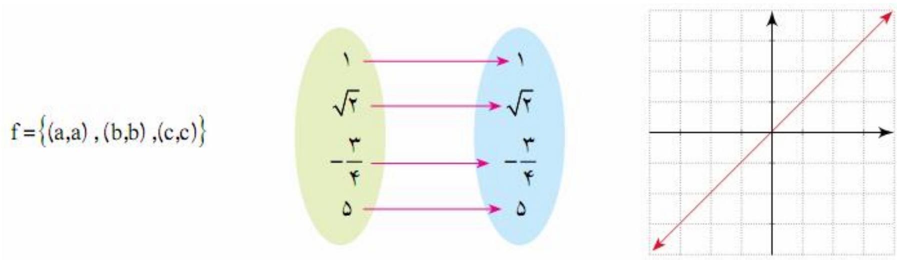
مثال: نمایش جبری دو تابع خطی را بنویسید که دامنه‌ی آن بازه‌ی $[-۳,۵]$ باشد.

درس سوم: انواع تابع

تابع چندجمله‌ای: توابعی را که نمایش جبری آن‌ها، چندجمله‌ای‌های جبری از یک متغیر هستند، توابع چندجمله‌ای می‌نامیم. مثل: $h(a)=۶a+\sqrt{۲}$, $g(t)=-\frac{۱}{۲}t+۵$, $f(x)=۲x^{۳}-۴x+۳$.

* تابع f را به صورت $y=۲x^{۳}-۴x+۳$ نیز نشان می‌دهیم. بقیه توابع را نیز می‌توان به این صورت نمایش داد.

تابع همانی: اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو از دامنه‌ی تابع دقیقا به همان عضو در برد نظیر شود، تابع را همانی می‌نامند. اگر دامنه‌ی تابع همانی را $\mathbb{R}$ در نظر بگیریم، نمودار آن همان خط $y=x$ است که با معادله‌ی $f(x)=x$ هم نمایش داده می‌شود.



تابع ثابت: تابعی مانند f را که برد آن فقط شامل یک عضو است، تابع ثابت می‌نامیم. اگر این عضو را c بنامیم، تابع ثابت را معمولا با معادله‌ی $f(x)=c$ نمایش می‌دهیم. مثل $f(x)=۰$, $h(t)=\sqrt{۵}$, $g(x)=-\frac{۲}{۳}$, $f(x)=۲$.

تابع قدر مطلق: تابعی را که هر مقدار در دامنه را به قدر مطلق آن در برد نظیر می‌کند، تابع قدر مطلق می‌گوییم. تابع قدر مطلق را با $f(x)=|x|$ یا $y=|x|$ نشان می‌دهیم.

* تابع $f(x)=|x|$ را به صورت دو ضابطه‌ای، به فرم $f(x)=\begin{cases} x & , \; x\geq ۰ \\ -x & , \; x<۰ \end{cases}$ نیز نشان می‌دهیم.

مثال: نمودار توابع $f(x)=|x|$ و $f(x)=-|x|$ را رسم کنید.

مثال: نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۱ & x\geq ۰ \\ x+۱ & x<۰ \end{cases}$ را در دستگاه مختصات رسم کنید و دامنه و برد آن را بیابید.

مثال: نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} ۱+x^{۲} & x\geq ۰ \\ ۱+\frac{x}{۲} & x<۰ \end{cases}$ را رسم کنید و سپس $f(۴)$ و $f(-۶)$ را به دست آورید.

مثال: نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} ۱-x^{۲} & x\geq ۰ \\ x-۳ & x<۰ \end{cases}$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را بیابید.

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۲ & x<۱ \\ ۲ & x>۱ \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

ب) دامنه‌ی تابع f را به دست آورید.

مثال: نمودار تابع $f\left(x\right)=\begin{cases}-۱ & x>۰\\ ۳ & x<۰\end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) نمودار تابع را رسم کنید.

ب) دامنه و برد تابع را بنویسید.

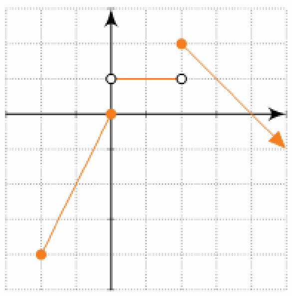
پ) مقادیر $f(۴)$ و $f(\sqrt{۳})$ و $f(-۵)$ را به دست آورید.

مثال: نمودار تابع $f\left(x\right)=\begin{cases}۲x-۵ & x>۲\\ ۱ & -۳<x\le ۲\\ -\frac{۱}{۲}x & x\le -۳\end{cases}$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را بیابید.

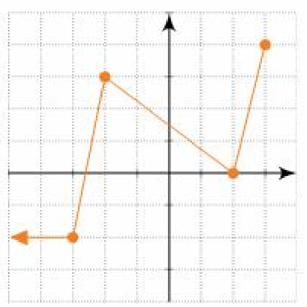
مثال: کدام‌یک از نمودارهای زیر، یک تابع را نشان می‌دهد؟ چرا؟

۱) $f(x)=\begin{cases}x & x>۰\\ x+۲ & x\le ۲\end{cases}$ ۲) $g(x)=\begin{cases}۲x & x<۰\\ x+۱ & x\ge ۰\end{cases}$

مثال: نمودار تابع قطعه‌ای f داده شد است. ضابطه‌ی آن را به دست آورید. دامنه و برد این تابع را به دست آورید.



مثال: نمودار تابع f به صورت زیر داده شد است. ضابطه‌ی آن را نوشته و مقادیر خواسته شده را به دست آورید.



۱) $f(۶)$ ۲) $f(\sqrt{۵})$ ۳) $f(۳)$ ۴) $f(\frac{۱}{۲})$ ۵) $f(۰)$ ۶) $f(-\frac{۵}{۲})$

رسم نمودار برخی توابع به کمک انتقال

فرض کنیم نمودار تابع $f\left(x\right)$ داده شده باشد، به کمک روش انتقال:

۱. برای رسم نمودار تابع $f\left(x\right)+k$ ، کافیست نمودار تابع $f\left(x\right)$ را به اندازه‌ی k واحد در امتداد محور y ها انتقال دهیم. اگر $k>۰$ باشد، انتقال در جهت مثبت و اگر $k<۰$ باشد، انتقال در جهت منفی خواهد بود.

۲. برای رسم نمودار تابع $f(x+k)$ ، کافیست نمودار تابع $f(x)$ را به اندازه‌ی k واحد در امتداد محور xها انتقال دهیم. اگر $k>0$ باشد، انتقال در جهت منفی و اگر $k<0$ باشد، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

مثال: ابتدا نمودار توابع $y=x^2$ و $y=-x^2$ و $y=|x|$ و $y=-|x|$ را رسم کنید و سپس نمودار توابع زیر را به کمک انتقال توابع فوق رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را تعیین کنید.

۱) $f(x)=(x-2)^2+3$ ۲) $f(x)=(x+3)^2+1$ ۳) $f(x)=(x-1)^2-2$

۴) $f(x)=-(x+1)^2+2$ ۵) $f(x)=-(x-3)^2+1$ ۶) $f(x)=x^2-3$

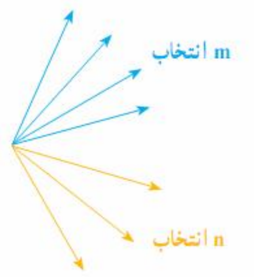
۷) $f(x)=(x+2)^2$ ۸) $f(x)=-x^2-2$ ۹) $f(x)=|x-2|+2$

۱۰) $f(x)=\left|x+\frac{1}{2}\right|$ ۱۱) $f(x)=-|x|+2$ ۱۲) $f(x)=-|x+1|-\frac{1}{2}$

فصل ۶: ترکیبات

درس اول: شمارش

اصل جمع: اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد، به طوری که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار مورد نظر $m+n$ روش وجود دارد. (توجه کنید که در نهایت قرار است کار مورد نظر فقط با یکی از شیوه‌ها انجام شود)



مثال: دانش آموزی ۴ کتاب رمان و ۳ کتاب علمی دارد، اگر قرار باشد یک کتاب از بین آن‌ها انتخاب کرده و به دوستش هدیه بدهد، چند انتخاب می‌تواند داشته باشد؟

تعمیم اصل جمع: اگر کاری را بتوان به k روش انجام داد، به طوری که در روش اول m_1 انتخاب و در روش دوم m_2 انتخاب و ... و در روش kام m_k انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار مورد نظر، $m_1+m_2+...+m_k$ روش وجود دارد.

اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحله‌ی اول m انتخاب و برای هر کدام از این m روش، مرحله‌ی دوم را بتوان به n روش انجام داد، در کل کار مورد نظر با $m\times n$ روش قابل انجام است. (توجه کنید که هر دو مرحله باید انجام شود)

مثال: فردی می‌خواهد با اتومبیل خود از تهران به اصفهان برود و برای این کار قصد دارد از قم نیز عبور کند. اگر از تهران به قم دو مسیر a و b و از قم به اصفهان سه مسیر ۱ و ۲ و ۳ وجود داشته باشد،این فرد به چند طریق می‌تواند از تهران به اصفهان برود؟

تعمیم اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل k مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحله‌ی اول m_1 روش و برای انجام مرحله‌ی دوم m_2 روش و ... و برای انجام مرحله‌ی kام، m_k روش وجود داشته باشد، برای انجام کار مورد نظر، $m_1\times m_2\times...\times m_k$ روش وجود دارد.

مثال: از بین ۳ نوع سوپ، ۵ نوع ساندویچ و ۲ نوع نوشابه، چند ناهار مختلف که شامل یک نوع سوپ، یک نوع ساندویچ و یک نوع نوشابه باشد می‌توان انتخاب کرد؟

مثال: شخصی ۴ پیراهن، ۳ شلوار و ۲ جفت کفش دارد؛ به چند شکل متفاوت می‌تواند هر سه‌ی آن‌ها را باهم بپوشد؟

مثال: در یک آزمون چهار گزینه‌ای با ۳ سوال، چند راه ممکن برای پاسخ‌گویی به سوالات وجود دارد در صورتی که به تمام سوالات پاسخ داده شود؟

مثال: به چند طریق می‌توان به ۵ سوال ۲ گزینه‌ای پاسخ داد به طوری که هیچ سوالی بی پاسخ نماند؟

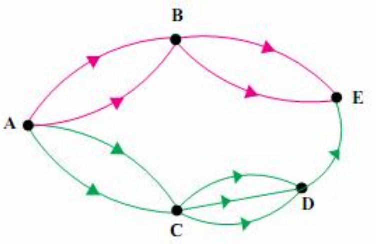
مثال: یک آزمون چندگزینه‌ای شامل ۱۰ سوال ۴ گزینه‌ای و ۵ سوال ۲ گزینه‌ای (بله – خیر) است. فردی قصد دارد به سوال‌ها به صورت تصادفی جواب دهد. او به چند روش می‌تواند این کار را انجام دهد اگر:

الف) مجبور باشد به همه‌ی سوال‌ها جواب دهد؟

ب) بتواند سوال‌ها را بدون جواب هم بگذارد؟

مثال: رمزی از سه حرف تشکیل شده است که هر کدام می‌تواند از حروف فارسی یا حروف کوچک انگلیسی باشد. اگر حروف کنار هم از یک زبان نباشند، برای این رمز چند حالت ممکن وجود دارد؟

مثال: اگر شکل زیر نشان‌دهنده‌ی جاده‌های بین شهرهای A و B و C و D و E باشد و همه‌ی جاده‌ها یک طرفه باشند، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر E رفت؟



مثال: با حروف a,b,c,d,e و بدون تکرار:

الف) چند کلمه‌ی سه حرفی می‌توان نوشت که تکرار مجاز نباشد؟

ب) چند کلمه‌ی سه حرفی می‌توان نوشت که تکرار مجاز باشد؟

پ) چند کلمه‌ی سه حرفی می توان نوشت که شامل حرف c نباشد؟

ت) چند کلمه‌ی چهار حرفی می توان نوشت که حرف اول آنها b و حرف آخر آنها a باشد؟

ث) چند کلمه‌ی سه حرفی می توان نوشت که حتماً شامل حرف d باشند؟

مثال: با حروف کلمه‌ی (هندسه) و بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمه‌ی چهار حرفی می توان نوشت که با حرف (ن) شروع نشود؟

ب) چند کلمه‌ی دو حرفی می توان نوشت که با حرف (س) شروع شود؟

مثال: با ارقام ۵و۹و۶و۸و۷ چند عدد:

الف) سه رقمی می‌توان نوشت که تکرار ارقام مجاز نباشد؟

ب) سه رقمی می‌توان نوشت که تکرار ارقام مجاز باشد؟

پ) چهار رقمی زوج می‌توان نوشت که تکرار مجاز نباشد؟

ت) سه رقمی مضرب ۵ می‌توان نوشت که تکرار مجاز نباشد؟

ث) سه رقمی مضرب ۵ می‌توان نوشت که تکرار مجاز نباشد؟

مثال: با ارقام ۵و۳و۸و۲و۷ به چند طریق می‌توان یک عدد سه رقمی ساخت به طوری که:

الف) این عدد زوج باشد و تکرار ارقام مجاز نباشد.

ب) رقم یکان آن ۷ باشد و تکرار ارقام مجاز باشد.

مثال: با ارقام ۳و۷و۵و۶و۸ به چند طریق می‌توان یک عدد سه رقمی بدون تکرار ساخت به طوری که:

الف) آن عدد زوج باشد.

ب) رقم یکان آن عدد اول باشد.

مثال: با ارقام ۵,۴,۳,۲,۱,۰ و بدون تکرار:

الف) چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟

ب) چند عدد چهار رقمی مضرب پنج می توان نوشت؟

پ) چند عدد چهار رقمی فرد می‌توان نوشت؟

ت) چند عدد چهار رقمی زوج می‌توان نوشت؟

ث) چند عدد سه رقمی بزرگتر از ۴۰۰ می‌توان نوشت؟

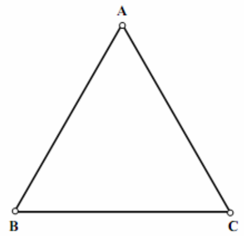
ج) چند عدد سه رقمی کوچک‌تر از ۴۰۰ می‌توان نوشت؟

مثال: می‌خواهیم راس‌های مثلث زیر را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کنیم.

الف) به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟

ب) به چند طریق می‌توان این رنگ‌آمیزی را انجام داد، به طوری که راس‌هایی که به هم وصل‌اند، هم‌رنگ نباشند.

پ) هر دو قسمت (الف) و (ب) را در حالتی که از سه رنگ مختلف استفاده می‌کنیم، بررسی کنید.



مثال: با پلاک‌هایی به صورت زیر که عدد دو رقمی سمت راست آن‌ها از مجموعه‌ی A و سایر ارقام از مجموعه‌ی B انتخاب می‌شوند و حرف استفاده شده در آن از مجموعه‌ی C انتخاب می‌شود، چند ماشین را می‌توان شماره‌گیری کرد؟

$A=\{۱۱,۲۲,...,۹۹\}$ $\qquad$ $B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$

$C=\{$ب،ج،د،س،ص،ط،ق،ل،م،ن،و،ه،ی$\}$

مثال: در یک کشور نوعی اتومبیل در ۵ مدل، ۱۰ رنگ، ۳ حجم موتور مختلف و ۲ نوع دنده (اتوماتیک و غیر اتوماتیک) تولید می‌شود.

الف) چند نوع مختلف از این اتومبیل تولید می‌شود؟

ب) اگر یکی از رنگ‌های تولید شده مشکی باشد، چند نوع از این اتومبیل با رنگ مشکی تولید می‌شود؟

پ) چند نوع از این اتومبیل مشکی دنده‌ی اتوماتیک دارند؟

مثال: مساله‌ی زیر را به گونه‌ای کامل کنید که جواب ارائه شده، درست باشد.

مساله: چند عدد زوج دو رقمی می‌توان نوشت به طوری که ....؟

حل: تعداد راه‌حل‌های نوشتن یکان برابر ۵ تاست و تعداد ره‌های نوشتن دهگان برابر ۴ تاست. لذا با توجه به اصل ضرب ۲۰ عدد با شرایط مورد نظر وجود دارد.

مثال: مساله‌ای طرح کنید که با استفاده از اصل جمع یا اصل ضرب و یا هر دوی آن‌ها حل شود و جواب آن به صورت مقابل باشد. $\qquad ۲\times۲\times۲+۳\times۳\times۳=۳۵$

درس دوم: جایگشت

معرفی یک نماد: اگر n یک عدد طبیعی باشد، حاصل‌ضرب اعداد طبیعی و متوالی از ۱ تا n را به صورت $n!$ (n فاکتوریل) نمایش می‌دهیم. به عنوان مثال: $۱!=۱$ $\qquad$ $۲!=۲\times۱=۲$ $\qquad$ $۳!=۳\times۲\times۱=۶$

قرارداد: $0! = 1$

نکته: جهت سهولت در ساده‌سازی، فاکتوریل یک عدد را می‌توانیم برحسب حاصل‌ضرب یک یا چند عدد در فاکتوریل عددی دیگر بنویسیم. به عنوان مثال:

$8! = 8\times 7!$ $\qquad$ $8! = 8\times 7\times 6!$ $\qquad$ $10! = 10\times 9\times 8\times 7!$

$n! = n(n-1)!$ $\qquad$ $n! = n(n-1)(n-2)!$

مثال: کدام یک از موارد زیر دست و کدام‌یک نادرست است؟

$1)\ 6! = 3! + 3!$ $\qquad$ $2)\ 6! = 6\times 5!$ $\qquad$ $3)\ 8! = 4!\times 2!$ $\qquad$ $4)\ 2\times 3! = 6!$

$5)\ (3!)^2 = 9!$ $\qquad$ $6)\ \dfrac{8!}{2!} = 4!$

مثال: عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$1)\ \dfrac{7!}{5!}$ $\qquad$ $2)\ \dfrac{10!}{9!}$ $\qquad$ $3)\ \dfrac{9!}{6!\times 3!}$ $\qquad$ $4)\ \dfrac{100!}{2!\times 98!}$

$5)\ \dfrac{n!}{(n-1)!}$ $\qquad$ $6)\ \dfrac{n!}{(n-2)!}$ $\qquad$ $7)\ \dfrac{n!}{(n-3)!}$ $\qquad$ $8)\ \dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$

$9)\ \dfrac{n!}{(n-k)!}$

جایگشت: اگر چند شیء متمایز داشت باشیم، به هر حالت چیدن آن‌ها کنار هم، یک جایگشت از آن اشیاء می‌گوییم.

نکته: تعداد جایگشت‌های n شی متمایز از رابطه‌ی $n!$ به دست می‌آید.

مثال: تعداد جایگشت‌های ۶ شی متمایز چندتاست؟

مثال: به چند حالت مختلف می‌توان حروف e,d,c,b,a را کنار هم قرار داد؟

مثال: با کنار م قرار دادن اعداد ۴,۳,۲,۱ چند عدد چهار رقمی می‌توان ساخت؟

نکته: تعداد جایگشت‌های r تایی از n شی متمایز یا به عبارتی تعداد انتخاب‌های r شی از بین n شی متمایز که در آن‌ها ترتیب قرار گرفتن مهم باشد، با $p(n,r)$ نمایش می‌دهیم و مقدار آن از دستور مقابل محاسبه می‌شود.

$$p(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad (0 \le r \le n)$$

مثال: تعداد جایگشت‌های ۳ تایی از ۵ شی متمایز را به دست آورید.

مثال: چهار نفر به چند طریق می توانند روی پنج صندلی که در یک ردیف چیده شده است، بنشینند؟

مثال: در یک شرکت که ۲۰ عضو دارد، قرار است یک رئیس، یک معاون و یک خزانه دار انتخاب شوند؛ اگر هر عضو فقط حداکثر در یکی از این سمت‌ها بتواند باشد، به چند طریق می‌توان انتخاب آن‌ها را انجام داد؟

مثال: در یک لیگ فوتبال ۱۸ تیم قرار دارند. در پایان این لیگ، تیم‌های اول تا سوم به چند حالت مختلف می‌توانند مشخص شوند؟

مثال: یک مربی فوتبال قصد دارد برای بازی پیش رو در تیم خود یک دفاع راست، یک دفاع چپ، یک دفاع جلو و یک دفاع عقب قرار دهد. او شش بازی‌کن دفاعی دارد که می‌توانند در هر کدام از این چهار پست بازی کنند. در شروع بازی چند حالت برای چیدن این خط دفاعی برای این مربی وجود دارد؟

مثال: در یک نوع ماشین حساب کوچک که دارای ۲۰ کلید است، برای انجام یک دستور خاص، باید سه کلید با ترتیبی مشخص فشار داده شوند. اگر فردی نداند سه کلید مورد نظر کدام‌اند و بخواهد به طور تصادفی این کار را انجام دهد و

فشردن هر سه کلید ۲ ثانیه زمان بخواهد، این فرد حداکثر (در بدترین حالت) در چه زمانی می‌تواند دستور مورد نظر را اجرا کند؟

مثال: از بین تعدادی کتاب می‌خواهیم سه کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه‌ای بچینیم، اگر تعداد حالت‌های مختلف برای این کار ۲۱۰ باشد، تعداد کتاب‌ها چند تاست؟

مثال: به چند طریق می توان ۷ کتاب مختلف را در یک قفسه چید به طوری که ۳ کتاب مشخص همواره کنار هم باشند؟

مثال: به چند طریق می توان ۴ کتاب فیزیک سالهای اول تا چهارم دبیرستان تا را کنار هم در یک قفسه چید به طوری که:

الف) هیچ محدودیتی در چیدن کتابها وجود نداشته باشد.

ب) کتاب سال دوم در خانه‌ی اول از سمت چپ قرار بگیرد.

پ) کتابهای سال دوم و چهارم همواره کنار هم باشند.

ت) کتابهای سالهای اول و دوم، کنار هم و کتابهای سالهای سوم و چهارم نیز کنار هم باشند.

مثال: به چند طریق می‌توان ۳ کتاب شیمی مختلف و ۵ کتاب ریاضی مختلف را در کنار هم در یک قفسه قرار داد به طوری که:

الف) هیچ تفاوتی در هنگام چیدن بین کتابها قائل نشویم.

ب) همه‌ی کتابهای ریاضی کنار هم قرار گیرند.

پ) همه‌ی کتابهای شیمی کنار هم قرار گیرند.

ت) کتابهای ریاضی در کنار هم و کتابهای شیمی نیز در کنار هم قرار گیرند.

مثال: ۲ کتاب مختلف ریاضی و ۳ کتاب مختلف فیزیک را به چند طریق می توان در یک قفسه چید به طوری که:

الف) هیچ شرطی در چیدن کتاب‌ها اعمال نشود.

ب) هر دو کتاب ریاضی کنار هم قرار بگیرند.

پ) کتاب های ریاضی کنار هم قرار نگیرند.

ت کتاب های ریاضی در ابتدا و انتهای قفسه قرار گیرند.

ث) کتاب های فیزیک کنار هم و کتاب های ریاضی نیز کنار هم قرار گیرند.

ج) هیچ دو کتاب ریاضی یا فیزیک کنار هم قرار نگیرد.

مثال: با حروف کلمه‌ی (جهانگردی) و بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان نوشت؟

ب) چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان نوشت که به حرف (ی) ختم شود؟

پ) چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها حروف (ی) و (د) کنار هم قرار داشته باشند؟

ت) چند کلمه‌ی ۶ حرفی می‌توان نوشت که به (گردی) ختم شوند؟

ث) چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آن حروف کلمه‌ی (جهان) چهار حرف اول باشند؟

ج) چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها حروف کلمه‌ی (جهان) کنار هم باشند؟

چ) چند کلمه‌ی ۶ حرفی می‌توان نوشت که با حرف نقطه‌دار شروع شوند؟

درس سوم: ترکیب

به هر انتخاب r شی از n شی متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد یا به عبارتی به هر زیرمجموعه‌ی r عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی، یک ترکیب r تایی از n شی می‌گوییم. تعداد ترکیب‌های r تایی از n شی متمایز را معمولا با $C(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم و داریم: $(0 \le r \le n)$ $\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$

نکته: در محاسبات مربوط به ترکیب، از فرمول‌های زیر می‌توان استفاده کرد.

$$\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2} \qquad \binom{n}{r}=\binom{n}{n-r} \qquad \binom{n}{n-1}=n \qquad \binom{n}{1}=n \qquad \binom{n}{n}=1 \qquad \binom{n}{0}=1$$

مثال: به چند طریق می‌توان از بین ۱۲ نفر، یک تیم ۴ نفره برای کوهنوردی انتخاب کرد؟

مثال: کدام‌یک از سوالات زیر از طریق جای‌گشت و کدام‌یک از طریق ترکیب حل می‌شوند؟ جواب هر کدام را به دست آورید.

الف) به چند طریق می‌توانیم از بین ۶ کتاب، ۴ کتاب را در یک قفسه کنار هم بچینیم؟

ب) به چند طریق می‌توانیم از بین ۶ کتاب، ۴ کتاب را برای هدیه دادن به یک نفر انتخاب کنیم؟

پ) به چند طریق می‌توان از بین ۸ کتاب مختلف، ۵ کتاب را برای مطالعه انتخاب کرد؟

ت) به چند طریق ممکن می‌توان از بین ۷ دانش‌آموز، ۳ نفر را برای اعزام به یک اردوی فرهنگی انتخاب کرد؟

مثال: گل‌فروشی در فروشگاه خود ۱۰ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته گل، از ۳ تا ۵ شاخ گل متمایز می‌تواند قرار دهد. او چند دسته گل مختلف می‌تواند درست کند؟

مثال: یک نقاش، قوطی‌هایی از چهار رنگ قرمز، آبی، زرد و مشکی دارد. اگر او با ترکیب دو یا چند قوطی از رنگ‌های متمایز بتواند رنگ جدیدی به دست آورد، او چند رنگ می‌تواند داشته باشد؟

مثال: یک فروشنده‌ی تنقلات، در فروشگاه خود، پسته، بادام، گردو، تخمه کدو، تخمه ژاپنی، نخودچی و کشمش دارد. از نظر او در یک آجیل، حداقل باید ۵ نوع از این تنقلات وجود داشته باشد. او با تنقلات موجود در فروشگاهش چند نوع آجیل می‌تواند درست کند؟

مثال: در یک کلاس، تعدادی دانش‌آموز که همگی دارای شرایط علمی خوبی‌اند، داوطلب حضور در مسابقات علمی هستند. معلم قصد دارد ۲ نفر را به تصادف انتخاب کند. او این ۲ نفر را به ۲۸ روش می‌تواند از بین داوطلبان انتخاب کند. تعداد داوطلبان چند نفر بوده است؟

مثال: در یک کیسه ۴ مهره‌ی سفید و ۶ مهره‌ی آبی متمایز وجود دارد. به چند طریق می توان ۴ مهره خارج کرد به طوری که:

الف) سه مهره سفید و یک مهره آبی باشد.

ب) فقط سه مهره آبی باشد.

پ) حداقل دو مهره سفید باشد.

ت) هر چهار مهره همرنگ باشند.

مثال: برای تشکیل تیمی ۶ دانش آموز سال سوم و ۵ دانش آموز سال اول داوطلب شده اند، به تصادف سه دانش آموز انتخاب می کنیم. احتمال آن را بیابید که:

الف) دو دانش آموز از سال سوم و یک دانش آموز از سال اول باشد.

ب) هر سه دانش آموز از یک کلاس باشند.

پ) حداکثر ۲ دانش آموز از سال اول باشد.

مثال: به چند طریق می توان ۳ لامپ باهم و به تصادف از بین ۱۲ لامپ متمایز که ۸ عدد از آنها معیوب است انتخاب کرد به طوری که:

الف) هر سه لامپ سالم باشد.

ب) حداقل دو لامپ معیوب باشد.

پ) یکی از لامپ ها معیوب باشد.

مثال: در کیسه‌ای ۵ مهره آبی و ۴ مهره سفید متمایز وجود دارد. به چند طریق می‌توان از میان آنها سه مهره به طور تصادفی انتخاب کرد به طوری که:

الف) ۲ مهره آبی و ۱ مهره سفید انتخاب شود.

ب) تمام مهره ها سفید باشند.

پ) هیچ مهره ای سفید نباشد.

ت) هر سه مهره همرنگ باشند.

ث) تعداد مهره های آبی از سفید بیشتر باشد.

ج) حداقل ۲ مهره آبی باشد.

چ) حد اکثر ۱ مهره سفید باشد.

مثال: از میان ۸ ریاضی‌دان و ۶ فیزیک‌دان و ۵ شیمی‌دان، قرار است کمیته‌ای علمی انتخاب شود. به چند طریق این کمیته می‌تواند انتخاب شود هرگاه:

الف) کمیته ۶ نفره باشد و از هر رشته ۲ نفر در آن عضو باشند؟

ب) کمیته ۳ نفره باشد و از هر رشته ۲ نفر در آن عضو باشند؟

پ) کمیته ۲ نفره باشد و حداقل یک ریاضی‌دان در آن باشد؟

مثال: کیسه ای شامل ۲ مهره‌ی آبی، ۳ مهره‌ی قرمز و ۴ مهره‌ی زرد متمایز است. به چند طریق می توان ۳ مهره خارج کرد به طوری که:

الف) حتماً دو مهره زرد باشد.

ب) هر سه مهره همرنگ باشند.

پ) هر سه مهره از رنگهای متفاوت باشند.

مثال: از جعبه‌ای که شامل ۴ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سبز و ۲ مهره‌ی سیاه می‌باشد، ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم، مطلوب است احتمال آن که:

الف) فقط ۲ مهره سفید باشد.

ب) حداکثر ۲ مهره سبز باشد.

مثال: در یک دوره مسابقات کشتی، از بین ۴ داور ایرانی، ۳ داور ژاپنی و ۲ داور روسی قرار است کمیته‌ای از داوران تشکیل شود. به چند روش می‌توان این کار را انجام داد اگر:

الف) کمیته ۴ نفره باشد.

ب) کمیته ۳ نفره باشد و از هر یه کشور، یک نفر در کمیته باشد.

پ) کمیته ۵ نفره باشد و دقیقا دو داور ایرانی باشد.

ت) کمیته ۵ نفره باشد و حداقل ۳ داور ایرانی باشند.

ث) کمیته ۷ نفره باشد و شامل ۳ داور ایرانی، ۲ داور ژاپنی و ۲ داور روسی باشد.

ج) کمیته ۵ نفره باشد و حداقل یک داور ایرانی باشد.

مثال: یک اداره دارای ۱۸ عضو است. این اداره دارای ۱ رئیس، ۳ معاون، ۲ حسابدار، ۶ کارشناس اداری، ۳ کارمند کارگزینی و ۳ کارشناس امور حقوقی است. این اداره ماهانه باید جلسه‌ای ۵ نفره جهت بررسی و تصویب آخرین طرح‌های پیشنهادی برگزار کند. به چند طریق این گروه ۵ نفره می‌تواند انتخاب شود هرگاه:

الف) رئیس و دقیقا یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند.

ب) رویس و دقیقا یک معاون و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند.

پ) رویس و دقیقا یک معاون، یک حسابدار و یک کارشناس امور حقوق در جلسه باشند.

مثال: دانش‌آموزی در امتحانی از بین ۱۰ سوال باید حتماً به ۸ سوال پاسخ دهد:

الف) او این سوالات را به چند طریق می تواند انتخاب کند؟

ب) اگر او بخواهد حتماً به سه سوال اول پاسخ دهد، انتخاب او به چند طریق خواهد بود؟

مثال: یک آشپز، ۱۰ نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۳ تا از این ادویه‌ها یک طعم مخصوص درست می‌کند. این آشپز چند طعم می‌تواند درست کند هرگاه:

الف) هیچ محدودیتی در استفاده از ادویه‌ها نداشته باشد؟

ب) دو نوع ادویه هستند که باهم نمی‌توانند استفاده شوند؟

پ) سه نوع ادویه هستند که نباید هر سه باهم استفاده شوند؟

ت) ادویه‌ها به دو دسته‌ی ۵ تایی تقسیم می‌شوند که هیچ کدام از ادویه‌های دسته‌ی اول با هیچ‌یک از ادویه‌های دسته‌ی دوم سازگاری

ندارند؟

مثال: در مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰\}$ مطلوب است:

الف) تعداد کل زیر مجموعه‌ها.

ب) تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی.

پ) تعداد زیر مجموعه‌های هشت عضوی.

ت) تعداد زیر مجموعه‌های پنج عضوی.

ث) تعداد زیر مجموعه‌های زوج عضوی.

ج) تعداد زیر مجموعه‌های ۵ عضوی که عدد ۸ در تمام آنها موجود باشد.

چ) چ) تعداد زیر مجموعه‌های ۵ عضوی که عدد ۸ در هیچ کدام از آن‌ها موجود نباشد.

ح) تعداد زیر مجموعه‌های ۴ عضوی که در هیچ کدام از آنها اعداد ۵ و ۹ نباشد.

مثال: ۸ نقطه روی محیط یک دایره قرار دارند:

الف) چند وتر می‌توان با نقاط یاد شده رسم کرد؟

ب) چند مثلث می‌توان رسم کرد که رئوس مثلث از نقاط مذبور باشند.

مثال: مساله‌ای طرح کنید که جواب آن برابر باشد با:

الف) $\binom{۵}{۳}\times\binom{۶}{۲}$

ب) $\binom{۵}{۳}+\binom{۶}{۲}$

مثال: درستی تساوی مقابل را ثابت کنید. $P(۵,۳)=۶C(۵,۲)$

مثال: در تساویهای زیر مقدار n را تعیین کنید.

$2) c\left(n+1,3\right)=3p\left(n,2\right)$ $1) p(n,2)=72$

$4) p(n,4)=3p(n,3)$ $3) p\left(n,2\right)+4=c\left(5,2\right)$

مثال: مقادیر n و r را در دستگاه زیر محاسبه کنید.

$$\begin{cases} c(n,r)=10 \\ p(n,r)=60 \end{cases}$$

فصل ۷: آمار و احتمال

درس اول: احتمال یا اندازه‌گیری شانس

پدیده‌ی تصادفی (آزمایش تصادفی): آزمایش یا رخدادی است که نتیجه‌ی آن به طور دقیق قابل پیش‌بینی نباشد، آزمایش تصادفی گفته می‌شود. مثل پرتاب تاس، پرتاب سکه و انتخاب تصادفی یک کارت از چند کارت شماره‌گذاری شده.

فضای نمونه‌ای: به مجموعه‌ی تمام حالت‌های ممکن در آزمایش تصادفی، فضای نمونه‌ای گفته و آن را با S نشان می‌دهیم.

مثال: ابتدا تعداد اعضای فضای نمونه‌ای را در هر یک از آزمایش‌های تصادفی زیر، طبق اصل ضرب مشخص کنید و سپس اعضای فضای نمونه‌ای را در هر یک از آزمایش‌های تصادفی، بنویسید.

پرتاب یک سکه - پرتاب هم‌زمان دو سکه - پرتاب سه سکه - پرتاب یک تاس - پرتاب دو تاس - پرتاب یک تاس و یک سکه

پیشامد: به هر یک از زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌ای، یک پیشامد تصادفی می‌گوییم.

مثال: فرض کنید خانواده‌ای ۴ فرزند دارد که از تعداد جنسیت فرزندان اطلاعی در دست نیست:

الف) فضای نمونه‌ای تعداد فرزندان چند عضو دارد؟ اعضای فضای نمونه‌ای را بنویسید.

ب) پیشامد A را بنویسید که در آن یک دختر در این خانواده متولد شده باشد.

پ) پیشامد B را بنویسید که در آن حداکثر یک دختر در این خانواده متولد شده باشد.

ت) پیشامد C را بنویسید که در آن حداقل یک دختر در این خانواده متولد شده باشد.

ث) پیشامد D را بنویسید که در آن تعداد فرزندان پسر و دختر برابر باشد.

ج) پیشامد E را بنویسید که در آن تعداد فرزندان پسر از تعداد فرزندان دختر بیشتر باشد.

چ) پیشامد F را بنویسید که در آن فرزند اول و آخر پسر باشند.

ح) پیشامد G را بنویسید که در آن فرند پسر در خانواده متولد نشده باشند.

مثال: دو تاس را باهم پرتاب می کنیم. مطلوب است:

الف) تعداد اعضای فضای نمونه ای.

ب) پیشامد A که در آن مجموع اعداد رو شده برابر ۷ باشد.

پ) پیشامد B که در آن مجموع اعداد رو شده مضرب سه باشد.

ت) پیشامد C که در آن هر دو عدد رو شده اول باشد.

ث) پیشامد D که در آن عدد روی تاس اول زوج و عدد روی تاس دوم بیشتر از ۵ باشد.

ج) پیشامد E که در آن مجموع اعداد رو شده مضرب ۵ و عدد روی تاس اول مضرب ۳ باشد.

مثال: در کیسه ای ۵ مهره آبی و ۴ مهره سفید متمایز وجود دارد. از میان آنها سه مهره به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. مطلوب است تعداد اعضای:

الف) پیشامد A که در آن ۲ مهره آبی و ۱ مهره سفید انتخاب شود.

ب) پیشامد B که در آن تمام مهره ها سفید باشند.

پ) پیشامد C که در آن هیچ مهره ای سفید نباشد.

ت) پیشامد D که در آن هر سه مهره همرنگ باشند.

ث) پیشامد E که در آن تعداد مهره های آبی از سفید بیشتر باشد.

ج) پیشامد F که در آن حداقل ۲ مهره آبی باشد.

چ) پیشامد G که در آن حد اکثر ۱ مهره سفید باشد.

مثال: دو تاس را باهم پرتاب می کنیم. مطلوب است:

الف) تعداد اعضای فضای نمونه ای.

ب) پیشامد A که در آن مجموع اعداد رو شده برابر ۷ باشد.

پ) پیشامد B که در آن مجموع اعداد رو شده مضرب سه باشد.

ت) پیشامد C که در آن هر دو عدد رو شده اول باشد.

ج) پیشامد D که در آن عدد روی تاس اول زوج و عدد روی تاس دوم بیشتر از ۵ باشد.

چ) پیشامد E که در آن مجموع اعداد رو شده مضرب ۵ و عدد روی تاس اول مضرب ۳ باشد.

مثال: هر یک از اعداد طبیعی و زوج کوچک‌تر از ۱۱ را روی یک کارت نوشته و یکی را به تصادف برمی‌داریم:

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

ب) چه تعداد پیشامد تصادفی روی این فضای نمونه‌ای می‌توان تعریف کرد؟

پ) پیشامد A را که در آن عدد روی کارت بر ۵ بخش‌پذیر باشد مشخص کنید.

ت) پیشامد B را که در آن عدد روی کارت اول یا فرد باشد مشخص کنید.

ث) پیشامد C که در آن عدد کارت مضرب ۳ و زوج باشد.

ج) پیشامد D که در آن عدد کارت مضرب ۳ یا اول باشد.

مثال: هر یک از اعداد دو رقمی را که با اعداد ۳ و ۴ و ۵ و ۶ می‌توان نوشت، روی کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، یکی را به تصادف بر می داریم. مطلوب است تعیین:

الف) فضای نمونه ای این تجربه‌ی تصادفی.

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۴ باشد.

پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت اول باشد.

ت) پیشامد C که در آن عدد روی کارت زوج و یا مضرب ۳ باشد.

مثال: تمام ترکیبات دو رقمی بدون تکرار مجموعه‌ی اعداد $\{۱,۲,۳\}$ را روی کارت‌های مختلف نوشته‌ایم (هر ترکیب روی یک کارت)، یک کارت را به طور تصادفی خارج می‌کنیم؛ مطلوب است:

الف) فضای نمونه‌ای

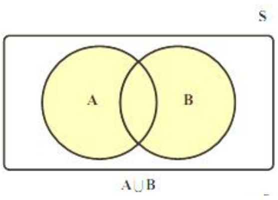
ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت زوج باشد.

پ) پیشامد B که در ان عدد روی کارت اول باشد.

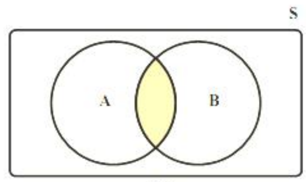
اعمال روی پیشامدها

اگر A و B پیشامدهایی در فضای نمونه‌ای S باشند، در این صورت:

الف) اجتماع دو پیشامد: پیشامد $A\cup B$ وقتی رخ می‌دهد که یا A یا B و یا هر دو رخ دهد. (حداقل یکی رخ دهد)

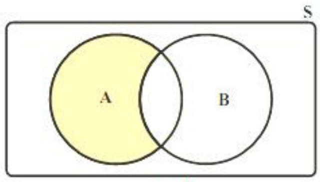


ب) اشتراک دو پیشامد: پیشامد $A \cap B$ وقتی رخ می‌دهد که هم A و هم B رخ دهد.



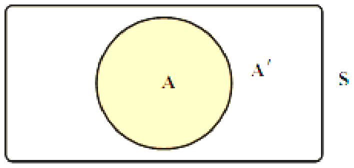
$A \cap B$

پ) تفاضل دو پیشامد: پیشامد $A - B$ وقتی رخ می‌دهد که A رخ دهد ولی B رخ ندهد. (فقط A رخ دهد)



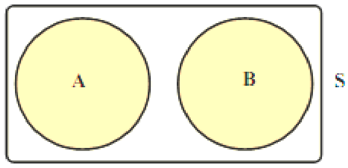
$A-B$

ت) متمم یک پیشامد: متمم پیشامد A را با A' یا A^c نشان می‌دهیم. A' وقتی رخ می‌دهد که A رخ ندهد.



نکته: $A \cup A' = S$ و $A \cap A' = \varnothing$

پیشامدهای ناسازگار: دو پیشامد A و B را ناسازگار گوییم هرگاه: $A \cap B = \varnothing$. در واقع A و B هیچگاه باهم رخ نمی‌دهند.



نکته: A و A' همواره ناسازگارند.

مثال: در پرتاب یک تاس، هرگاه پیشامد A رو شدن عدد کمتر از ۳ و پیشامد B رو شدن عدد اول باشد، آیا A و B ناسازگارند؟ چرا؟

مثال: دو تاس مختلف را پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامد آن باشد که حداقل یکی ۵ بیاید و B پیشامد آن باشد که شماره‌های رو شده برابر باشند، آیا A و B ناسازگارند؟

مثال: خانواده‌ای دارای سه فرزند است. اگر A پیشامد هم‌جنس بودن دو فرزند اول و B پیشامد وجود یک فرزند پسر در این خانواده باشد:

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

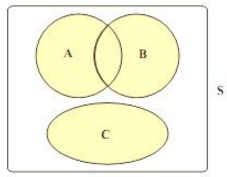
ب) پیشامد A و B را مشخص کنید.

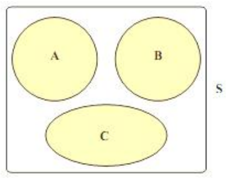
پ) آیا دو پیشامد A و B ناسازگارند؟ چرا؟

مثال: سکه سالمی را سه بار پرتاب می کنیم. اگر A پیشامد برآمدهایی باشد که در آن دومین پرتاب رو است و B پیشامد برآمدهایی باشد که در آن فقط دو رو به صورت متوالی ظاهر شده است. آیا دو پیشامد A و B ناسازگارند؟ چرا؟

پیشامدهای دو به دو ناسازگار: اگر A و B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، این سه پیشامد را دو به دو ناسازگار می‌گوییم هرگاه $A\bigcap B=\varnothing$, $A\bigcap C=\varnothing$, $B\bigcap C=\varnothing$.

مثال: کدام‌یک از پیشامدهای زیر دو به دو ناسازگارند؟





مثال: اگر یک تاس را بیندازیم و پیشامدهای (رو شدن عدد بزرگ‌تر از۴)، (رو شدن عدد کوچک‌تر از ۳) و (رو شدن عدد ۳ یا ۴) را به ترتیب A، B و C تعریف کنیم، در این صورت، پیشامدهای A، B و C دو به دو ناسازگارند.

مثال: تاسی را می‌اندازیم. روی فضای نمونه‌ای حاصل، پیشامدهای A، B و C را طوری تعریف کنید که:

الف) A و B ناسازگار باشند.

ب) A، B و C دو به دو ناسازگار باشند.

پ) $(A\bigcap B)$ و C ناسازگار باشند.

مثال: یک تاس را دو بار به هوا می اندازیم، مطلوب است:

الف) تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای.

ب) پیشامد A که در آن عددهای برآمده فرد باشند.

پ) پیشامد B که در آن مجموع عددهای برآمده ۸ باشد.

ت)پیشامد $A\bigcap B$.

مثال: تاسی را یک بار می‌اندازیم مطلوب است تعیین:

الف) فضای نمونه ای این تجربه‌ی تصادفی.

ب) پیشامد A که در آن عدد تاس زوج باشد.

پ) پیشامد B که در آن عدد تاس مضرب ۳ باشد.

ت) پیشامد $A-B'$.

مثال: یک سکه و یک تاس سالم را باهم می اندازیم مطلوب است تعیین :

الف) فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی.

ب) پیشامد A که تاس عدد زوج یا سکه رو بیاید.

پ) پیشامد B که تاس عدد زوج و سکه رو بیاید.

ت) $A'\bigcup B'$.

مثال: یک سکه‌ی سالم را سه بار می اندازیم مطلوب است:

الف) فضای نمونه ای این تجربه‌ی تصادفی.

ب) پیشامد A که در آن اقلاً دو بار رو بیاید.

پ) پیشامد B که در آن فقط ۲ بار پشت بیاید.

ت) پیشامد C که در آن هر سه بار سکه به یک رو ظاهر شود.

ج) پیشامد $A\bigcap B'$.

مثال: یک سکه را سه بار می اندازیم. مطلوب است:

الف) فضای نمونه ای.

ب) پیشامدی A که در آن حداقل ۲ بار رو بیاید.

پ) پیشامد B که در آن هر سه بار به یک طرف ظاهر شود.

مثال: سکه ای را یک بار پرتاب می کنیم؛ اگر پشت بیاید آنگاه تاس را می ریزیم و اگر رو بیاید سکه را دو بار دیگر پرتاب می کنیم. مطلوب است:

الف) فضای نمونه ای این تجربه‌ی تصادفی.

ب) پیشامد A که در آن دقیقاً یک بار سکه به پشت بیاید.

پ) پیشامد B که در آن دقیقاً دو بار سکه رو بیاید.

ت) پیشامد $A' \bigcup B$.

مثال: در یک خانواده‌ی سه فرزندی پیشامدی را که در آن فرزند اول دختر باشد A و پیشامدی را که در آن فرزند سوم پسر باشد B می نامیم.

الف) پیشامدهای A و B را بنویسید.

ب) پیشامد $A \bigcap B'$ را بنویسید.

مثال: اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، با رسم نمودار ون، پیشامد "تنها یکی از دو پیشامد A یا B اتفاق بیفتد" را نمایش دهید.

مثال: اگر A و B دو پیشامد معین باشند، پیشامد "A و B هر دو باهم اتفاق بیفتد" را با یک عبارت مجموعه‌ای مناسب بنویسید و آن را با استفاده از نمودار ون نشان دهید.

مثال: اگر A و B دو پیشامد معین باشند، پیشامد " فقط پیشامد A اتفاق بیفتد" را با استفاده از نمودار ون نشان دهید.

مثال: اگر A، و B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای باشند. ر یک از عبارت‌های توصیفی زیر را با نمودار ون نشان دهید:

الف) پیشامدهای A و C رخ دهند ولی B رخ ندهد.

ب) فقط پیشامد B رخ دهد.

پ) پیشامد B رخ دهد و C رخ ندهد.

مثال: سکه‌ای را یک بار پرتاب می‌کنیم. اگر سکه رو ظاهر شد، آن‌گاه تاس را می‌ریزیم در غیر این‌صورت یک بار دیگر سکه را می‌اندازیم.

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟

ب) پیشامد A را که در آن عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد یا سکه پشت بیاید، با اعضا بنویسید.

مثال: سکه‌ای را یک بار پرتاب می‌کنیم. اگر سکه پشت ظاهر شد، آن‌گاه یک تاس می‌اندازیم و اگر رو بیاید دو سکه‌ی دیگر می‌اندازیم.

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را بنویسید.

ب) پیشامد آن را که تاس زوج بیاید بنویسید.

پ) پیشامد آن را که حداقل ۲ سکه رو بیاید مشخص کنید.

مثال: چنانچه در پرتاب یک تاس عددی کمتر از ۲ بیاید یک سکه را سه بار پرتاب می کنیم و اگر عددی کمتر از ۲ نیاید سکه را یک بار پرتاب می کنیم؛ فضای نمونه ای این تجربه‌ی تصادفی را بنویسید.

مثال: سکه ای را آنقدر پرتاب می کنیم که برای اولین بار رو بیاید. پیشامدی از این آزمایش تصادفی را بنویسید که در کمتر از ۶ بار پرتاب به این منظور برسیم.

مثال: سکه ای را آنقدر پرتاب می کنیم که رو بیاید. فرض کنید A پیشامد آن باشد که در پرتاب دوم یا سوم به این نتیجه برسیم. فضای نمونه ای این آزمایش و پیشامد A را بنویسید.

احتمال رخداد یک پیشامد (اندازه‌گیری شانس)

اگر S یک فضای نمونه‌ای و A یک پیشامد از ان باشد، در این صورت احتمال وقوع پیشامد A به صورت زیر تعیین می‌شود.
$$P(A)=\frac{n(A)}{n(s)}$$

مثال: دو تاس را باهم می‌اندازیم. مطلوب است احتمال آن‌که:

الف) هر دو تاس زوج بیایند.

ب) مجموع دو تاس ۵ باشد.

پ) مجموع دو تاس ۸ و تاس اول فرد باشد.

ت) مجموع دو تاس ۸ و تاس اول مضرب ۳ باشد.

ث) مجموع دو تاس ۸ یا هر دو تاس فرد باشند.

ج) مجموع دو تاس ۷ و هر دو تاس فرد باشند.

چ) مجموع دو تاس بیشتر از ۱۰ باشد.

ح) مجموع دو تاس کمتر از ۱۱ باشد.

خ) حاصل‌ضرب ر دو عدد رو شده ۱۲ باشد.

مثال: یک تاس و یک سکه را باهم پرتاب می کنیم. احتمال آن را بیابید که:

الف) عدد روی تاس بزرگتر از ۵ باشد.

ب) سکه پشت و تاس ۴ بیاید.

پ) سکه پشت یا تاس ۴ بیاید.

ت) سکه رو و تاس فرد بیاید.

مثال: برای تشکیل تیمی ۶ دانش آموز سال سوم و ۵ دانش آموز سال اول داوطلب شده اند، به تصادف سه دانش آموز انتخاب می کنیم. احتمال آن را بیابید که:

الف) دو دانش آموز از سال سوم و یک دانش آموز از سال اول باشد.

ب) هر سه دانش آموز از یک کلاس باشند.

پ) حداکثر ۲ دانش آموز از سال اول باشد.

مثال: از جعبه‌ای که شامل ۴ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سبز و ۲ مهره‌ی سیاه می‌باشد، ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم، مطلوب است احتمال آن که:

الف) فقط ۲ مهره سفید باشد.

ب) حداکثر ۲ مهره سبز باشد.

مثال: اگر حروف کلمه‌ی (جهانگردی) را به تصادف کنار هم قرار دیم، چقدر احتمال دارد:

الف) حرف (ی) آخر باشد؟

ب) دو حرف (ی) و (د) کنار هم باشند؟

پ) با حرف (ج) شروع و به حرف (ی) ختم شود؟

مثال: اگر ۷ نفر که دو نفر آن‌ها باهم برادرند، به تصادف در یک ردیف قرار بگیرند، چه‌قدر احتمال دارد:

الف) دو برادر کنار یکدیگر باشند؟

ب) یکی از آن‌ها در ابتدای ردیف و دیگری در انتهای ردیف قرار بگیرند؟

قوانین احتمال:

۱) $0 \le P(A) \le 1$

۲) $P(\varnothing)=0\ ,\ P(S)=1$

۳) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \le P(B)$

۴) $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، آنگاه: ۵) $\begin{cases} P(A \cap B)=0 \\ P(A \cup B)=P(A)+P(B) \end{cases}$

۶) $P(A')=1-P(A) \quad , \quad P(A)=1-P(A')$

مثال: رابطه‌ی ۳ را ثابت کنید.

مثال: اگر $P(A')=0/3$ و $P(B)=0/7$ و $P(A \cup B)=0/9$ باشد، آن‌گاه حاصل $P(A \cap B)$ را به دست آورید.

مثال: اگر $P(A \cup B)=\frac{6}{8}$ و $P(A \cap B)=\frac{1}{3}$ و $P(A')=\frac{3}{8}$ باشد، مطلوب است محاسبه‌ی $P(B)$.

مثال: اگر $P(A)=\frac{1}{3}$ و $P(B')=\frac{3}{4}$ و A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، حاصل $P(A \cup B)$ را به دست آورید.

مثال: اگر $P(A)=\frac{1}{4}\ ,\ P(A \cup B)=\frac{2}{3}\ ,\ A\ ,\ B$ دو پیشامد ناسازگار باشند، $P(B')$ را تعیین کنید.

مثال: احتمال آن که دانش آموزی در درس ریاضی قبول شود $0/7$ و احتمال آن که در درس شیمی قبول شود $0/85$ و احتمال آن که در هر دو درس قبول شود $0/6$ است. مطلوب است احتمال آن‌که حداقل در یکی از دو درس ریاضی و شیمی قبول شود.

مثال: احتمال آن‌که دانش آموزی در درس ریاضی قبول شود ۵۵ درصد و در درس شیمی قبول شود ۶۰ درصد است، اگر احتمال آن‌که حداقل در یکی از این دو درس قبول شود ۷۵ درصد باشد، احتمال آن را بیابید که در هر دو درس قبول شود

مثال: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند ثابت کنید: $P(A \cap B) \ge P(A)+P(B)-1$

درس دوم: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامع و نمونه

آمار: آمار مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.

علم آمار: مجموعه روش‌هایی است که شامل جمع‌آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی می‌شود.

* می‌خواهیم درباره‌ی این‌که چند درصد از دانش‌آموزان پسر دوره‌ی دوم متوسطه شهر تهران دچار چاقی هستند، تحقیق کنیم. چون بررسی تمام این افراد داری مشکلاتی است، لذا تعدادی از دانش‌آموزان را انتخاب کرده و آن‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در تحقیق فوق کل دانش‌آموزان را جامعه و بخش انتخاب شده را نمونه می‌گوییم.

جامعه: مجموعه‌ی تمام افراد یا اشیایی که درباره‌ی یک یا چند ویژگی آن‌ها تحقیق صورت گیرد، جامعه یا جمعیت نامیده می‌شود و هر یک از این افراد یا اشیا را عضو جامعه می‌گوییم.

اندازه‌جامعه (حجم جامعه): تعداد اعضای جامعه را اندازه‌ی جامعه یا حجم جامعه گویند.

نمونه: بخشی از جامعه را که برای مطالعه انتخاب شود، نمونه گویند و هر یک از افراد یا اشیای انتخاب شده را عضو نمونه گویند.

اندازه‌ی نمونه (حجم نمونه): تعداد اعضای نمونه را اندازه‌ی نمونه یا حجم نمونه گویند.

نکته:

۱) نمونه باید به طور تصادفی انتخاب شود یعنی اعضای نمونه شانس مساوی برای انتخاب شدن داشته باشند.

۲) نمونه باید معرف جامعه باشد یعنی تعداد آن به اندازه‌ای باشد که بتوان نتایج بررسی آن را به کل جامعه تعمیم داد. به عنوان مثال برای یک کلاس ۳۵ نفری انتخاب ۷ نفر می‌تواند نمونه‌ی مناسبی باشد ولی ۷ نفر برای یک مدرسه که ۴۰۰ دانش‌آموز دارد نمی‌تواند مناسب باشد.

مثال: در هر یک از موارد زیر، جامعه را مشخص کرده و یک نمونه‌ی مناسب انتخاب کنید.

۱) تعیین میزان ساعت مطالعه‌ی روزانه‌ی دانش‌آموزان بیرستان توحید.

۲) تعیین اندازه‌ی قند خون افراد بالای ۳۰ سال شهر دامغان.

۳) تعیین درصد لامپ‌های معیوب یک شرکت تولیدی لامپ.

درس سوم: متغیر و انواع آن

متغیر: متغیر، یک ویژگی از اعضای جامعه است که مورد بررسی قرار می‌گیرد.

متغیرها به دو نوع تقسیم می‌شوند که هر کدام نیز شامل دو نوع می‌باشد.

۱) متغیرهای کمی: متغیرهایی که قابل اندازه گیری باشند، متغیرهای کمی نامیده می‌شوند. مثل تعد دانش‌آموزان یک کلاس و وزن نامههای موجود در یک اداره‌ی پست.

متغیرهای کمی به دو دسته تقسیم می‌شوند:

الف) متغیر پیوسته: متغیری است که اگر دو مقدار a و b را بتواند اختیار کند، هر مقدار بین آن‌ها را نیز بتواند اختیار کند. مثل حجم آب یک مخزن.

ب) متغیر گسسته: متغیری است که پیوسته نباشد. مثل تعداد فرزندان یک خانواده.

۲) متغیرهای کیفی: متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری نیستند، متغیرهای کیفی نامیده می‌شوند. مثل گروه خونی افراد و دوره‌ی زندگی افراد.

متغیرهای کیفی به دو دسته تقسیم می‌شوند:

الف) ترتیبی: متغیری است که در ان نوعی ترتیب طبیعی وجود داشته باشد. مثل سطح تحصیلات (دیپلم، فوق دیپلم، کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری)

ب) متغیر اسمی (غیر ترتیبی): متغیر کیفی است که ترتیبی نیست. مثل جنسیت (زن و مرد)

مثال: نوع متغیرها را در نمودار زیر مشخص کنید.

متغیر	نوع متغیر
۱ــ میزان بارندگی برحسب سانتی‌متر در یک شهر	
۲ــ نوع بارندگی (باران، برف)	
۳ــ تعداد شهرهایی که در یک روز هوای آفتابی دارند	
۴ــ میزان دمای هوا	
۵ــ شدت آلودگی هوا(زیاد، متوسط، کم)	
۶ــ انواع وضعیت هوا (آفتابی، ابری، بارانی، برفی)	
۷ــ شدت بارندگی (زیاد،متوسط، کم)	

مثال: جدول زیر، متغیرهای دانش آموزان را نشان می‌دهد. انواع متغیرها را از نظر کمی، کیفی، گسسته، پیوسته، ترتیبی و اسمی مشخص کنید.

متغیرهای دانش آموزان	متغیر کمّی	متغیر کیفی	متغیر گسسته	متغیر پیوسته	متغیر ترتیبی	متغیر اسمی
سن	×			×		
نمرهٔ ریاضی نهم						
جنسیت (دختر و پسر)						
قد						
وزن						
میزان هوش (هوش بالا، متوسط، پایین)		×			×	
میزان رضایت در مدرسه (بسیار، متوسط، ضعیف)						
شاخص تودهٔ بدن						

مثال: شاخص توده‌ی بدن از حاصل تقسیم وزن برحسب کیلوگرم بر مربع قد بر حسب متر به دست می آید. اگر وزن شخصی، ۹۵ کیلو گرم و قد او ۱/۶۰ متر باشد:

الف) شاخص توده‌ی بدن این شخص را حساب کنید.

ب) شاخص توده‌ی بدن شخص چه نوع متغیری از نظر کمی، کیفی، گسسته، پیوسته، ترتیبی و اسمی است؟

	پایانی اول	پایانی دوم	شهریور
فصل ۱			
فصل ۲			
فصل ۳			
فصل ۴			
فصل ۵			
فصل ۶			
فصل ۷			
جمع	۲۰	۲۰	۲۰