



## توابع نمایی و لگاریتمی

فصل سوم حسابان یازدهم ریاضی و فیزیک

طبقه بندی سوالات به صورت موضوعی 

نکات کنکوری و سوالات چهار گزینه ای 

حل تمامی تمرین ها ، فعالیت ها و کاردر کلاس ها 

مؤلف:

حبیب هاشمی

۱۳۹۷

جهت تهیه جزوات کنکوری تمام مباحث ریاضی تالیف حبيب هاشمی کارشناس ارشد ریاضی کاربردی با نوزده سال سابقه تدریس  
دربزرگاری کلاس های کنکور؛ دبیر رسمی آموزش و پرورش منطقه ۲ تهران و مدرس دانشگاه با شماره ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس بگیرید و یا  
به آیدی تلگرام @habib\_hashemi پیام دهید.

اینستاگرام: [riazi.academy](https://www.instagram.com/riazi.academy)

سایت ریاضیکده [www.riazikade.ir](http://www.riazikade.ir)

جزوه کنکوری تمام مباحث ریاضیات تالیف حبيب هاشمی در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour

تدریس خصوصی و مبحثی ریاضیات

متوسطه

و

تضمینی کنکور

تهران و کرج

## مقدمه

جزوه حاضر که براساس مطالب مبحث « **توابع نمایی و لگاریتمی و کاربردهای آنها** » نگارش شده است، دارای ویژگی‌های زیر است:

- ۱- باز کردن مفاهیمی که در کتاب درسی به علت محدودیت حجم، به آن کمتر پرداخته شده است.
  - ۲- مطالب به صورت ساده و روان و به زبان دانش آموز ارائه شده است.
  - ۳- مطالب و نکات، به گونه ایی است که خلأ بین مطالب ارائه شده در کتب درسی و سؤالات مطرح شده در کنکورهای سراسری را پر کند.
  - ۴- در این کتاب با نگاهی عمیق‌تر و جامع‌تر از کتاب درسی، به مطالب پرداخته شده و به همین منظور از مثال‌ها و مسائل حل شده متنوعی بهره گرفته ایم.
  - ۵- ایجاد تعادل نسبی بین مهارت‌های محاسبات صوری و درک مفهومی.
  - ۶- استفاده از مسائل باز پاسخ.
  - ۷- توجه به دانش قبلی دانش آموزان.
  - ۸- ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه‌های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب.
- در پایان امیدواریم که مطالعه‌ی دقیق این کتاب و بهره‌گیری از رهنمودهای دبیران فرهیخته و گران قدر بتواند موفقیت تحصیلی شما خوبان را تضمین و تثبیت نماید. ارائه‌ی نظرات شما دانش پژوهان، دبیران فرهیخته و گران قدر، موجب سپاس و امتنان است.

حبیب هاشمی

## معادلات لگاریتمی

یکی از مهم‌ترین کاربردهای لگاریتم، حل معادلات لگاریتمی است که معمولاً از مدل سازی یک مسئله‌ی واقعی به دست می‌آید. مانند محاسبه‌ی شدت زلزله، مشخص کردن ضعیف‌ترین صدای قابل شنیدن یا آستانه‌ی شنوایی، پیش بینی تعداد جمعیت یک جامعه پس از زمان مشخص و محاسبه‌ی نیمه‌ی عمر عناصر رادیواکتیو، معادلات زیر نمونه‌هایی از معادلات لگاریتمی‌اند:

$$\log_4 x + 1 = 3, \log_3 7, \log_5 x + \log_5(x - 1) = \log_5 12$$

منظور از حل معادله‌ی لگاریتمی، پیدا کردن مقادیری برای مجهول است که در معادله صدق کند.

### حل معادله لگاریتمی :

**حالت I: اگر در بین جملات معادله عددی دیده نشد** در این صورت به کمک

قوانین لگاریتم کاری می‌کنیم که در سمت چپ تساوی فقط یک لگاریتم بدون ضریب و

در سمت راست هم فقط یک لگاریتم بدون ضریب داشته باشیم یعنی دو طرف معادله را به

شکل  $\log_a^{f(x)} = \log_a^{g(x)}$  تبدیل می‌کنیم. اگر در دو طرف تساوی، دو لگاریتم هم مبنا

داشته باشیم می‌توانیم ادعا کنیم که ورودی‌های آنها با هم برابر است.

$$\log_a^{f(x)} = \log_a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

**تذکره:** اگر یک لگاریتم ضریب عددی داشت ابتدا با استفاده از قانون  $m \log_a b = \log_a b^m$  آن

ضریب را به توان ورودی قرار می‌دهیم سپس معادله را حل می‌کنیم.

**تذکره:** اگر دو لگاریتم داشتیم که بین آنها بعلاوه یا منها بود با استفاده از قوانین زیر به یک لگاریتم

تبدیل می‌کنیم

$$\text{۳) } \log_a^x + \log_a^y = \log_a^{x \cdot y}$$

$$\text{۴) } \log_a^x - \log_a^y = \log_a^{\frac{x}{y}}$$

**تذکر مهم:** جواب های بدست آمده در صورتی قابل قبول هستند که در سه شرط زیر

$$\left\{ \begin{array}{l} > 0 \text{ ورودی} \\ > 0 \text{ مبنا} \\ \neq 1 \text{ مبنا} \end{array} \right. \quad \text{صدق کنند}$$

**مثال:** معادله‌ی لگاریتمی  $\log_5(x^2 - 2) = \log_5 x$  را حل کنید.

**حل:** به سادگی می‌توان دید  $x^2 - 2 = x$  و از این رو  $x^2 - x - 2 = 0$  از طرفی

$x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$  و در نتیجه ریشه‌های معادله‌ی اخیر برابر است با ۲ و -۱- قسمت

مهم حل یک معادله‌ی لگاریتمی آزمایش کردن جواب‌هاست. در این مثال، چون لگاریتم اعداد نامثبت

تعریف نشده است، تنها جواب قابل قبول  $x=2$  است.

**مثال:** معادله‌ی لگاریتمی  $\log_5 16 = \log_5 x - \log_5 4$  را حل کنید.

**حل:** می‌دانیم  $\log_5 x - \log_5 4 = \log_5 \left(\frac{x}{4}\right)$  بنابراین  $\log_5 \left(\frac{x}{4}\right) = \log_5 16$  و در نتیجه  $\frac{x}{4} = 16$

از این رو  $x^3 = 16 \times 4 = 64$  بنابراین  $x=4$  با جا گذاری  $x=4$  در معادله‌ی بالا می‌توان دید این جواب قابل

قبول است.

**مثال:** معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

(۱)  $\log_5(x + 6) = \log_5(2x - 3) \rightarrow x + 6 = 2x - 3 \rightarrow x = 9$

که  $x=9$  برای هر دو لگاریتم قابل قبول است.

(۲)  $\log_4(x + 2) = \log_4 8 \rightarrow x + 2 = 8 \rightarrow x = 6$

$$(۳) \log_p(p^x - 2) = \log_p p \rightarrow p^x - 2 = p \rightarrow p^x - p - 2 = 0 \rightarrow (p - 2)(p + 1) = 0 \rightarrow p = 2, p = -1$$

توجه کنید که  $p = -1$  قابل قبول نیست.

$$(۴) ۳ \log_x x = -\log_x ۲۷ \rightarrow \log_x x^3 = \log_x \frac{1}{۲۷} \rightarrow x^3 = \frac{1}{۲۷} \rightarrow x = \frac{1}{۳}$$

$$(۵) ۲ \log(x - 2) = \log(x + 10) \rightarrow \log(x - 2)^2 = \log(x + 10)$$

$$\rightarrow (x - 2)^2 = x + 10 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = x + 10 \rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$\rightarrow (x - 6)(x + 1) = 0 \rightarrow x = 6 \text{ ق ق}$$

$$(۶) \log(x^2 - 1) = \log 3 + \log(x + 3)$$

$$\rightarrow \log(x^2 - 1) = \log 3(x + 3)$$

$$\rightarrow x^2 - 1 = 3(x + 3) \rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \rightarrow (x - 5)(x + 2) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x - 5 = 0 \rightarrow x = 5 \\ x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \end{cases}$$

با توجه به حدود  $x$ ، هر دو جواب قابل قبول است.

$$(۷) \log(x - 2) + \log(x - 4) = 2 \log 2$$

$$\log(x - 2) + \log(x - 4) = \log((x - 2)(x - 4)) = \log 2^2$$

$$\rightarrow (x - 2)(x - 4) = 2^2 \rightarrow x^2 - 6x + 8 = 4 \rightarrow x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$\Delta = 36 - 16 = 20 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2} = 3 \pm \sqrt{5} \xrightarrow{x > 4} x = 3 + \sqrt{5}$$

$$(۸) \log_f a - \log_f 5 = \log_f ۲۵ \rightarrow \log_f \left( \frac{a}{5} \right) = \log_f ۲۵ \rightarrow \frac{a}{5} = ۲۵ \rightarrow a^x = ۱۲۵ \rightarrow a^x$$

$$= 5^x \rightarrow a = 5$$

**مثال:** معادله ی  $\log(x-2) + \log(x-4) = 2\log 2$  را حل کنید؟

$$\log(x-2)(x-4) = \log 2^2 \Rightarrow x^2 - 6x - 18 = 4 \rightarrow \begin{cases} x = 3 + \sqrt{5} \\ x = 3 - \sqrt{5} \end{cases}$$

چون ورودی منفی شود می غ ق ق

**تست:** اگر  $\log(x-2) = \log(x+10)$   $2\log(x-2) = \log(x+10)$  آن گاه  $\log_{\frac{1}{4}}(x+2)$  کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۵)

- (۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $\frac{3}{4}$  (۳)  $\frac{4}{3}$  (۴)  $\frac{3}{2}$

$$2\log(x-2) = \log(x+10) \Rightarrow \log(x-2)^2 = \log(x+10) \Rightarrow (x-2)^2 = x+10$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = x + 10 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{ورودی منفی غ ق ق}} \log_{\frac{1}{4}}(x+2) = \log_{\frac{1}{4}}(6+2) = \log_{\frac{1}{4}} 8 = \frac{3}{2}$$

**تست:** ریشه های معادله ی  $\log(4-x) = \log(x+6) - \log(-x)$  کدام است؟

- (۱)  $-1, 6$  (۲)  $-2, -3$  (۳)  $-1$  (۴)  $6$

$$\log(4-x) = \log \frac{x+6}{-x} \Rightarrow \frac{4-x}{1} = \frac{x+6}{-x}$$

$$\Rightarrow -4x + x^2 = x + 6 \rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \begin{cases} x = 6 \text{ ق ق غ} \\ x = -1 \text{ ق ق} \end{cases}$$

$x = 6 \rightarrow$  ورودی منفی می شود

**تست:** اگر  $\log^3 + \log^{\sqrt[4]{3}} = \log^{(81)^k}$  آن گاه لگاریتم  $\frac{5}{k}$  در پایه ۲ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۶)

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

$$\log^3 + \log^{\sqrt[4]{3}} = \log^{(81)^k} \Rightarrow \log^3 \times \sqrt[4]{3} = \log^{(81)^k}$$



$$\Rightarrow \log_{3 \times 3^{\frac{1}{4}}} = \log_{(81)^k} \rightarrow \log_{3^{\frac{5}{4}}} = \log_{(81)^k}$$

$$\Rightarrow 3^{\frac{5}{4}} = (81)^k \Rightarrow 3^{\frac{5}{4}} = (3^4)^k \rightarrow 3^{\frac{5}{4}} = 3^{4k} \rightarrow \frac{5}{4} = 4k \rightarrow k = \frac{5}{16}$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{5}{4}} \frac{5}{16} = \log_{\frac{5}{4}} \frac{5}{16} = \log_{\frac{5}{4}} \frac{16}{5} = 4$$

**تست:** اگر  $\log^{(x-2)} = 2 \log^2 - \log^{(x-4)}$  حاصل  $\log^{x-2}$  کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۷)

- (۱) ۰
- (۲) ۱
- (۳) -۱
- (۴)  $\frac{1}{2}$

$$\log^{(x-2)} = \log \frac{4}{x-4} \rightarrow x-2 = \frac{4}{x-4}$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{6 + \sqrt{20}}{2} = 3 + \sqrt{5} \\ x = \frac{6 - \sqrt{20}}{2} \text{ غ ق} \end{cases}$$

$$\log_{3 + \sqrt{5} - 2} = \log_{\sqrt{5}} = \log_{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$$

**تست:** از معادله  $\log^{(2x-1)} + \log^{x+3} = \log^3 - \log^2$  مقدار  $\log^x$  کدام است؟ (سراسری ریاضی

۸۴)

- (۱)  $\frac{-1}{2}$
- (۲)  $\frac{1}{3}$
- (۳)  $\frac{2}{3}$
- (۴)  $\frac{3}{2}$

$$\log^{(2x-1)(x+3)} = \log \frac{30}{2}$$

$$\Rightarrow (2x-1)(x+3) = 15 \rightarrow 2x^2 + 6x - x = 15$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 5x - 15 = 0 \rightarrow (2x+9)(2x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-9}{2} \text{ غ ق} \\ x = 2 \text{ ق ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{8}} x = \log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{8} = \log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{8^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{3}$$

**مثال:** معادلات زیر را حل کنید.

$$۱) \ln(4x - 5) = \ln(2 - x) \Rightarrow 4x - 5 = 2 - x \Rightarrow x = \frac{7}{5}$$

$$۲) \ln(2x - 1) + \ln(x - 7) = \ln 7 \Rightarrow \ln(2x - 1)(x - 7) = \ln 7$$

$$\Rightarrow (2x - 1)(x - 7) = 7 \Rightarrow 2x^2 - 15x + 7 = 7 \Rightarrow 2x^2 - 15x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ق ق} \\ x = \frac{15}{2} \end{cases}$$

**تست:** جواب معادله ی  $\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) + 2\log x = \log 2$  کدام است؟

- ۱ (۱)      -۲ (۲)      ۲ (۳)      -۱, -۲ (۴)

$$\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \log x^2 = \log 2 \Rightarrow \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)x^2 = \log 2$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{x}\right)x^2 = 2 \Rightarrow x^2 + x = 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ق ق} \\ x = -2 \text{ غ ق} \end{cases}$$

**تست:** اگر  $\log(x - 1) + \log(x + 1) = \log 3$  حاصل  $\log_{\frac{1}{5}} x$  کدام است؟

- ۲ (۱)       $\sqrt{2}$  (۲)       $\frac{1}{2}$  (۳)       $\frac{1}{\sqrt{2}}$  (۴)

$$\log(x - 1)(x + 1) = \log 3 \Rightarrow (x - 1)(x + 1) = 3 \Rightarrow x^2 - 1 = 3 \rightarrow x^2 = 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ ق ق} \\ x = -2 \text{ غ ق} \end{cases} \Rightarrow \log_{\frac{1}{5}} 2 = 2 \log_{\frac{1}{5}} 2 = 2^1 = 2$$

**تست:** اگر  $\log_x^{(4x+1)} = \log_x^{x^2+4}$  حاصل  $\log \sqrt[3]{x}$  کدام است؟

- $\frac{3}{2}$  (۱)      ۰ (۲)       $\frac{2}{3}$  (۳)      ۳ (۴)

$$(4x + 1) = x^2 - 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow (x - 3)(x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} x = 1 \rightarrow \text{غ ق ق} \\ x = 3 \rightarrow \text{ق ق} \end{cases}$$

(مبنا نمی تواند یک باشد)

**حالت II: اگر در معادله داده شده عدد داشتیم** عدد را یک سمت تساوی و لگاریتم ها را به سمت

دیگر تساوی منتقل می کنیم و به کمک قوانین لگاریتم آنها را به یک لگاریتم بدون ضریب تبدیل می کنیم

یعنی شکل معادله را به صورت  $\log_a^{f(x)} = k$  تبدیل می کنیم سپس با **قانون حذف لگاریتم** آنرا حل می

کنیم یعنی

$$\log_a^{f(x)} = k \Rightarrow a^k = f(x)$$

**تذکره:** اگر یک لگاریتم ضریب عددی داشت ابتدا با استفاده از قانون  $m \log_a b = \log_a b^m$  آن ضریب را به

توان ورودی قرار می دهیم سپس معادله را حل می کنیم.

**تذکره:** اگر دو لگاریتم داشتیم که بین آنها بعلاوه یا منها بود با استفاده از قوانین زیر به یک لگاریتم تبدیل می کنیم

$$۳) \log_a^x + \log_a^y = \log_a^{x \cdot y}$$

$$۴) \log_a^x - \log_a^y = \log_a^{\frac{x}{y}}$$

**مثال:** معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

(۱)  $\log_3 x = 2 \rightarrow x = 3^2 = 9$

(۲)  $\log_5 x = 3 \rightarrow x = 5^3 \rightarrow x = 125$

(۳)  $\log_2(2x + 1) = 3 \rightarrow 2x + 1 = 2^3 \rightarrow 2x + 1 = 8 \rightarrow 2x = 7 \rightarrow x = 3.5$

$$(۴) \log_3 243 = 2x + 1 \rightarrow 243 = 3^{2x+1} \rightarrow 3^5 = 3^{2x+1} \rightarrow 2x + 1 = 5 \rightarrow x = 2$$

$$(۵) \log_3(x-1) = 4 \rightarrow x-1 = 3^4 \rightarrow x = 81 + 1 \rightarrow x = 82$$

$$(۶) \log_3(3x-1) = 3 \rightarrow 3x-1 = 3^3 \rightarrow 3x = 8 + 1 = 9 \rightarrow x = 3 \text{ ق}$$

$$(۷) \log_3(5x-1) = 2 \rightarrow 5x-1 = 3^2 = 9 \rightarrow 5x = 10 \rightarrow x = 2 \text{ ق}$$

$$(۸) \log_{\frac{1}{10}}(x^2 - 21) = -2$$

$$x^2 - 21 = \left(\frac{1}{10}\right)^{-2} \rightarrow x^2 - 21 = 10^2 \rightarrow x^2 - 21 = 100 \rightarrow x^2 = 121 \rightarrow x = -11, x = 11$$

توجه کنید که  $x = -11$  قابل قبول نیست.

$$(۹) 2 \log_4(x-1) = 3 \rightarrow \log_4(x-1)^2 = \log_4 64 \rightarrow (x-1)^2 = 64$$

$$\rightarrow \begin{cases} x-1 = 8 \rightarrow x = 9 \\ x-1 = -8 \rightarrow x = -7 \end{cases} \text{ توجه کنید که } x = -7 \text{ قابل قبول نیست}$$

$$(۱۰) \log_5(x+6) + \log_5(x+2) = 1 \rightarrow \log_5[(x+6)(x+2)] = 1$$

$$\rightarrow (x+6)(x+2) = 5 \rightarrow x^2 + 8x + 12 = 5 \rightarrow x^2 + 8x + 7 = 0$$

$$\rightarrow (x+7)(x+1) = 0 \rightarrow x = -7 \text{ یا } x = -1$$

توجه کنید که  $x = -7$  قابل قبول نیست؛ از این رو تنها جواب  $x = -1$  قابل قبول است که در معادله اصلی صدق می کند.

$$(۱۱) \log_7(x+1) + \log_7(x+4) = 2 \rightarrow \log_7(x+1)(x+4) = \log_7 49$$

$$\rightarrow (x+1)(x+4) = 49 \rightarrow x^2 + 5x + 4 = 49 \rightarrow x^2 + 5x = 45 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5 \end{cases}$$

توجه کنید که  $x = -5$  قابل قبول نیست؛ از این رو تنها جواب قابل قبول  $x = 0$  است.

$$(۱۲) \log_5(x+1) + \log_5(x-1) = 1$$

$$\log_5(x+1)(x-1) = 1 \rightarrow (x+1)(x-1) = 5^1 \rightarrow x^2 - 1 = 5 \rightarrow x^2 = 6 \rightarrow x$$

$$= -\sqrt{6}, x = \sqrt{6}$$

توجه کنید که  $x = -\sqrt{6}$  قابل قبول نیست.

$$(۱۳) \log_x(x^x + 4) = 1 + \log_x 5 \rightarrow \log_x(x^x + 4) - \log_x 5 = 1$$

$$\rightarrow \log_x \frac{x^x + 4}{5} = 1 \rightarrow \frac{x^x + 4}{5} = x^1 \rightarrow x^x + 4 = 5x$$

$$\rightarrow x^x - 5x + 4 = 0 \rightarrow (x - 1)(x - 4) = 0 \xrightarrow{x > 0, x \neq 1} x = 4$$

$$(۱۴) \log(x + 1) - \log(x - 3) = 3 \rightarrow \log \frac{x + 1}{x - 3} = 3 \rightarrow \log \frac{x + 1}{x - 3} = \log 1000$$

$$\rightarrow \frac{x + 1}{x - 3} = 1000 \rightarrow x + 1 = 1000x - 3000 \rightarrow 3001 = 999x \rightarrow x \cong 3/0.04$$

$$(۱۵) \log(2x) - \log(x - 3) = 1 \rightarrow \log \left( \frac{2x}{x - 3} \right) = \log 10 \rightarrow \frac{2x}{x - 3} = 10 \rightarrow 2x$$

$$= 10x - 30 \rightarrow 8x = 30 \rightarrow x = \frac{30}{8} = 3.75$$

**مثال:** معادله  $\log_x^3 + \log_x^{2x+9} = 2$  را حل کنید؟

$$\log_x^{3(2x+9)} = 2 \Rightarrow x^2 = 6x + 27 \rightarrow x^2 - 6x - 27 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = -3 \text{ غ ق ق } \end{cases} \text{ (پایه نمی تواند منفی باشد)}$$

$$\text{روش دوم: } \log_x^3 + \log_x^{2x+9} = 2 \log_x x \Rightarrow \log_x^{3(2x+9)} = \log_x x^2 \Rightarrow 6x + 27 = x^2 \rightarrow \dots$$

**مثال:** معادله  $\log_{\frac{1}{5}}^{(2x-1)} + \log_{\frac{1}{5}}^{(3x-5)} = 1$  را حل کنید؟

$$\log_{\frac{1}{5}}^{(2x-1)(3x-5)} = 1 \rightarrow 5^1 = (2x-1)(3x-5)$$

$$\Rightarrow 5 = 6x^2 - 10x - 3x + 5 \rightarrow 6x^2 - 13x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ غ ق ق } \\ x = \frac{13}{6} \text{ ق ق } \end{cases}$$

$$\text{مانند حالت (I) حل می کنیم} \Rightarrow \log_{\frac{1}{5}}^{(2x-1)} + \log_{\frac{1}{5}}^{(3x-5)} = \log_{\frac{1}{5}} 5$$

**مثال:** معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف)  $\log_4 m^2 - \log_4 m - 3 = 0$

ب)  $\log_4(12b - 21) - \log_2(b^2 - 3) = 2$

پ)  $\log_{\frac{1}{10}}(x^2 - 1) = -1$

(حل)

الف)  $\log_4 m^2 - \log_4 m - 3 = 0 \rightarrow 2 \log_4 m - \log_4 m - 3 = 0$

$\rightarrow \log_4 m = 3 \rightarrow m = 4^3 = 64$

ب)  $\log_4(12b - 21) - \log_2(b^2 - 3) = 2 \rightarrow \log_2 \frac{12b - 21}{b^2 - 3} = 2$

$\rightarrow \frac{12b - 21}{b^2 - 3} = 2^2 \rightarrow 12b - 21 = 4b^2 - 21 \rightarrow 4b^2 - 12b - 33 = 0$

بنابر این معادله جواب حقیقی ندارد.  $\Delta = (-12)^2 - 4(4)(-33) < 0$

پ)  $\log_{\frac{1}{10}}(x^2 - 1) = -1 \rightarrow x^2 - 1 = \left(\frac{1}{10}\right)^{-1} \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$

**تست:** اگر لگاریتم  $a$  در پایه  $\sqrt{3}$  برای  $\frac{4}{3}$  باشد، آنگاه لگاریتم  $(a^3 + 7)$  در پایه  $8$  کدام است؟ (سراسری)

تجربی (۸۷)

$\frac{2}{3}(4) \quad \sqrt{2}(3) \quad \frac{4}{3}(2) \quad \frac{2}{3}(1)$

$\log_{\sqrt{3}} a = \frac{4}{3} \rightarrow (\sqrt{3})^{\frac{4}{3}} = a \rightarrow \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}} = a \Rightarrow a = 3^{\frac{2}{3}}$

سؤال :  $\log_8 a^3 + 7 = \log_8 \left( \left(3^{\frac{2}{3}}\right)^3 + 7 \right) = \log_8 3^2 + 7 + \log_8 16 = \frac{4}{3}$

**تست:** اگر  $4\sqrt{2} = 4$  و  $1 + \log^{\sqrt{x+1}} = \log y$  مقدار  $y$  کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۵)

- ۲۵ (۴)
- ۱۵ (۳)
- ۱۲/۵ (۲)
- ۷/۵ (۱)

$$4 \times 2^{\frac{1}{2}} = 4^x \rightarrow 2^2 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^x \rightarrow x = \frac{5}{4}$$

$$1 + \log \sqrt{\frac{5}{4} + 1} = \log y \Rightarrow 1 = \log y - \log \sqrt{\frac{9}{4}} \Rightarrow 1 = \log^y - \log^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow 1 = \log \frac{y}{\frac{3}{2}} \rightarrow 1 = \log \frac{2y}{3} \rightarrow 10^1 = \frac{2y}{3} \rightarrow y = 15$$

**تست:** از دو معادله  $\log^{(y-x)} + \log^{4x+y} = 2$  و  $\log^{(y+2)} = 1$  مقدار  $x$  کدام است (سراسری تجربی ۸۷)

- ۴ (۴)
- ۳ (۳)
- ۲ (۲)
- ۱ (۱)

$$\log^{(y+2)} = 1 \rightarrow 10^1 = y+2 \rightarrow y = 8$$

$$\log^{(y-x)} + \log^{4x+y} = 2 \Rightarrow \log^{(8-x)} + \log^{(4x+8)} = 2$$

$$\Rightarrow 10^2 = (8-x)(4x+8) \rightarrow 100 = 32 + 64 - 4x^2 - 8x$$

$$\Rightarrow 100 = -4x^2 + 24x + 64 \rightarrow -4x^2 + 24x + 64 - 100 = 0$$

$$-4x^2 + 24x - 36 = 0 \xrightarrow{\div(-4)} x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow x = 3$$

**تست:** از دو معادله  $\log^{\frac{x}{y}} = 1 + \log^{\frac{(y+1)}{y}}$  و  $x^2 - y^2 = 32$  مقدار  $(x+y)$  در پایه ۴ کدام است (سراسری

تجربی ۸۹)

- ۲ (۴)
- ۳ (۳)
- ۲ (۲)
- ۱ (۱)

$$\log^{\frac{x}{y}} = 1 + \log^{\frac{(y+1)}{y}} \rightarrow \log^{\frac{x}{y}} - \log^{\frac{(y+1)}{y}} = 1$$

$$\Rightarrow \log^{\frac{x}{y+1}} = 1 \rightarrow 10^1 = \frac{x}{y+1} \rightarrow 2y+2 = x$$

$$x^2 - y^2 = 32 \Rightarrow (x - y)(x + y) = 32 \rightarrow (2y + 2 - y)(2y + 2 + y) = 32$$

$$(y + 2)(3y + 2) = 32 \rightarrow 3y^2 + 8y - 28 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \rightarrow x = 6 \\ y = -\frac{14}{3} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$\text{سؤال خوانند : } \log_{\frac{1}{4}} \frac{x+y}{4} = \log_{\frac{1}{4}} \frac{2+6}{4} = \log_{\frac{1}{4}} 2 = \log_{\frac{1}{2}} 2 = \frac{3}{2}$$

**تست:** از معادله ی لگاریتمی  $2 \log x = 1 + \log(x + \frac{12}{5})$  مقدار  $\log(x + \frac{12}{5})$  کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۵)

- (۱) -۱      (۲)  $\frac{1}{2}$       (۳) ۱      (۴) ۲

$$\log \frac{x^2}{x + \frac{12}{5}} = 1 \rightarrow 10^1 = \frac{x^2}{x + \frac{12}{5}} \rightarrow x^2 - 10x - 24 = 0 \rightarrow (x + 2)(x - 12) \Rightarrow \begin{cases} x = 12 \\ x = -2 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$\log_{\frac{1}{5}} (2(12) + 1) = 2$$

مانند حالت (I) آنرا حل می کنیم  $2 \log x = 1 + \log(x + \frac{12}{5}) \Rightarrow \log x^2 = \log 10 + \log(x + \frac{12}{5}) \Rightarrow$  روش دوم

**تست:** از معادله ی  $\log_{\frac{1}{3}} x^{2-1} = 1 + \log_{\frac{1}{3}}(x+3)$  مقدار لگاریتم  $(x-3)$  در مبنای ۴ کدام است؟ (سراسری ریاضی

(۸۸)

- (۱) -۱      (۲)  $-\frac{1}{2}$       (۳)  $\frac{1}{2}$       (۴)  $\frac{3}{2}$

$$\log_{\frac{1}{3}} x^{2-1} - \log_{\frac{1}{3}}(x+3) = 1 \rightarrow \log_{\frac{1}{3}} \frac{x^2-1}{x+3} = 1 \Rightarrow 3^1 = \frac{x^2-1}{x+3} \Rightarrow x^2-1 = 3x+9$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \xrightarrow{\text{خواسته سؤال}} \log_{\frac{1}{4}} \frac{x-3}{4} = \log_{\frac{1}{4}} \frac{-5}{4} \text{ غ ق ق} \\ x = 5 \Rightarrow \log_{\frac{1}{4}} \frac{x-3}{4} = \log_{\frac{1}{4}} \frac{5-3}{4} = \log_{\frac{1}{4}} \frac{2}{4} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} 2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$



**تست:** از تساوی  $\log_x^{(x^2+4)} = 1 + \log_x^5$  مقدار لگاریتم  $x$  در پایه ی ۲ کدام است؟

- (۱)  $-\frac{1}{2}$       (۲)  $\frac{1}{2}$       (۳)  $\frac{3}{2}$       (۴) ۲

$$\log_x^{x^2+4} - \log_x^5 = 1 \rightarrow \log_x \frac{x^2+4}{5} = 1 \Rightarrow x^1 = \frac{x^2+4}{5}$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ق ق } \\ x = 4 \end{cases}$$

خواسته سؤال

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} 4 = 2$$

**تمرین:** از تساوی  $\log_x^{(x^2+8)} = 2 - \log_x^{(x-6)}$  مقدار لگاریتم  $x$  در پایه ی ۴، کدام است؟ (سراسری تجربی)

(۹۳)

- (۱)  $\frac{1}{2}$       (۲)  $\frac{2}{3}$       (۳)  $\frac{3}{2}$       (۴) ۲

**تست:** جواب معادله ی  $\log_x^{(x^2-5)} - 3\log_x^x = 1$  کدام است؟

- (۱)  $3 - \sqrt{6}$       (۲)  $1 + \sqrt{6}$       (۳)  $4 - \sqrt{5}$       (۴)  $1 + \sqrt{5}$

$$\log_x^{x^2-5} - 3 \times \frac{1}{3} \log_x^x = 1 \rightarrow \log_x \frac{x^2-5}{x} = 1 \Rightarrow \frac{x^2-5}{x} = x^1$$

$$\Rightarrow x^2 - 5 = 2x \rightarrow x^2 - 2x - 5 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 24$$

$$\rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{24}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{6}}{2} = 1 + \sqrt{6}, 1 - \sqrt{6} \text{ ق ق}$$

**تست:** اگر  $\log^{(x^2-x+1)} + \log^{(x+1)} = 1$  باشد مقدار لگاریتم  $x$  در مبنای ۳ کدام است؟

- (۱)  $\frac{2}{3}$       (۲)  $\frac{3}{2}$       (۳)  $\frac{3}{4}$       (۴)  $\frac{4}{3}$

$$\log^{(x^2-x+1)} (x+1) = 1 \Rightarrow \log^{x^2+1} = 1 \Rightarrow 10^1 = x^2+1 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \sqrt{9}$$

سؤال : خواسته سؤال  $\log_3 \sqrt[3]{9} = \log_3 \frac{3^{\frac{2}{3}}}{3} = \frac{2}{3}$

**تمرین :** جواب معادله ی  $\log \frac{(x+2)}{x} = \log \frac{(4-x)}{x} + 1$  کدام است؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

**تست :** معادله ی  $\log_2 \frac{(3-x)}{2} - 2 \log_2 \frac{(-x)}{2} = -2$  چند جواب دارد؟

- ۱ (۲)      ۲ (۱)      ۳ (صفر)      ۴ (بی شمار)

$$\log_2 \frac{(3-x)}{2} - 2 \log_2 \frac{(-x)}{2} = -2 \Rightarrow \log_2 \frac{(3-x)}{x^2} = -2$$

$$\Rightarrow 2^{-2} = \frac{3-x}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{3-x}{x^2} \Rightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} \text{ق ق } x = -6 \\ \text{غ ق } x = 2 \end{cases}$$

**تست :** به ازای کدام مقدار  $a$  مقدار  $\log_3 \frac{75}{a}$  از  $2 \log_3 a$  سه واحد بیشتر است؟

- ۱ (۳)      ۲ (۴)      ۳ (۵)      ۴ (۵)

$$\log_3 \frac{75}{a} = 2 \log_3 a + 3 \Rightarrow \log_3 \frac{75}{a} - \log_3 a^2 = 3 \Rightarrow \log_3 \frac{75}{a^3} = 3$$

$$\Rightarrow 3^3 = \frac{75}{a^3} \Rightarrow a^3 = \frac{75}{27} = \frac{25}{9} \Rightarrow a^3 = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$$

**تست :** اگر  $\log_8 \frac{x^2+7}{8} = \frac{4}{3}$  باشد حاصل  $\log \frac{x}{9}$  کدام است؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۲)      ۴ (-۲)

$$\log_8 \frac{x^2+7}{8} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{x^2+7}{8^{\frac{4}{3}}} = x^2+7 \Rightarrow (2^{\frac{4}{3}})^{\frac{4}{3}} = x^2+7 \Rightarrow 2^4 = x^2+7 \rightarrow 16 = x^2+7$$

**تست:** جواب معادله  $\log_{\frac{1}{3}} = \log_{\frac{1}{5}}^{\sqrt{125}} - 2 \log_{\frac{1}{3}}^{(x+1)}$  کدام است؟

- (۱) صفر
- (۲) ۳
- (۳) ۸
- (۴) ۹

$$\log_{\frac{1}{3}}^{(x+1)} - \log_{\frac{1}{5}}^{(\sqrt{125})^2} = \log_{\frac{1}{3}}^{-2} \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}}^{x+1} - \log_{\frac{1}{5}}^{5^2} = -1$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{3}}^{x+1} - 2 = -1 \rightarrow \log_{\frac{1}{3}}^{x+1} = 1 \rightarrow 3^1 = x+1 \rightarrow x = 9 - 1 = 8$$

**تمرین:** معادله‌های لگاریتمی زیر را حل کنید:

الف)  $\log x + \log(x + 3) = 1$  ب)  $\log_2(x - 1) + \log_3\left(\frac{x}{2} + 1\right) = 2$

**مثال:** از هریک از دستگاه‌های زیر مقادیر  $x$  و  $y$  را به دست آورید.

$$\begin{cases} \log_2 x = 1 + \log_2(y + 1) \\ x^2 - y^2 = 32 \end{cases} \quad \text{ب) } \begin{cases} \log(y + 2) = 1 \\ \log(y - x) + \log(4x + y) = 2 \end{cases} \quad \text{آ)}$$

حل آ)  $\log(y + 2) = 1 \rightarrow y + 2 = 10^1 = 10 \rightarrow y = 8$

$$\log(y - x) + \log(4x + y) = 2$$

$$\xrightarrow{y=8} \log(8 - x) + \log(4x + 8) = 2$$

$$\rightarrow \log((8 - x)(4x + 8)) = 2 \rightarrow (8 - x)(4x + 8) = 10^2 = 100$$

$$\rightarrow 32x - 4x^2 - 8x + 64 = 100 \rightarrow 4x^2 - 24x + 36 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 4} x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (x - 3)^2 = 0 \rightarrow (x - 3)^2 = 0 \rightarrow x = 3$$

ب)  $\log_2 x = 1 + \log_2(y + 1) \rightarrow \log_2 x - \log_2(y + 1) = 1$

$$\rightarrow \log_2 \frac{x}{y + 1} = 1 \rightarrow \frac{x}{y + 1} = 2^1 \rightarrow x = 2(y + 1) \quad (*)$$

$$x^2 - y^2 = 32 \xrightarrow{*} (2(y+1))^2 - y^2 = 32 \rightarrow (4y^2 + 8y + 4) - y^2 = 32$$

$$\rightarrow 3y^2 + 8y - 28 = 0$$

$$\Delta = \frac{-8 \pm 20}{6} \xrightarrow{y > -1} y = 2 \xrightarrow{(*)} x = 6$$

**تست:** اگر  $\begin{cases} \log_3^x - \log_9^y = 0 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$  آن گاه  $x + y$  چقدر است؟

- ۲ (۱)      ۳ (۲)      ۶ (۳)      ۹ (۴)

$$\log_3^x - \log_9^y = 0 \Rightarrow \log_3^{\frac{x}{y}} = 0 \Rightarrow 3^0 = \frac{x}{y} \Rightarrow 1 = \frac{x}{y} \rightarrow \boxed{x = y} \quad I$$

$$2x - y = 1 \xrightarrow{\text{طبق (I)}} 2x - x = 1 \Rightarrow x = 1, y = 1$$

**تست:** از دو معادله دو مجهولی  $2^{x-y} \times 4^{x+y} = 1$  و  $\log y = 2 \log 3 + \log x$ ، مقدار  $y$  کدام است؟

(سراسری تجربی ۹۶)

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

**پاسخ:**

$$2^{x-y} \times 4^{x+y} = 1 \Rightarrow 2^{x-y} \times 2^{2x+2y} = 2^0 \Rightarrow 2^{(x-y)+(2x+2y)} = 2^0$$

$$\Rightarrow 3x + 2y - y = 0 \rightarrow 3x + 2y = y \quad I$$

$$\log y = 2 \log 3 + \log x \Rightarrow \log y = \log 3^2 + \log x \Rightarrow \log y = \log 9x \Rightarrow y = 9x \quad II$$

از حل دستگاه شماره I و II داریم:

$$3x + 2(9x) = y \rightarrow 21x = y \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$y \Rightarrow 9x \xrightarrow{x = \frac{1}{3}} y = 9 \times \frac{1}{3} = 3$$

**تمرین :** از دستگاه  $\begin{cases} \log_{\frac{x}{y}} + \log_{\frac{y}{x}} = 1 \\ \log_{\frac{x}{y}} - \log_{\frac{y}{x}} = 5 \end{cases}$  مقدار  $x + y$  کددام است؟

$\frac{17}{2}$  (۴)      ۷ (۳)       $\frac{7}{2}$  (۲)       $\frac{9}{2}$  (۱)

**تذکر:** در حل برخی از معادلات لگاریتمی باید از تغییر متغیر استفاده کنیم.

**مثال:** معادله  $3(\log_2 x)^2 - 4\log_2 x + 1 = 0$  را حل کنید.

**پاسخ:** با فرض  $A = \log_2 x$ ، معادله به صورت  $3A^2 - 4A + 1 = 0$  در می آید:

$$3A^2 - 4A + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} A = 1 \rightarrow \log_2 x = 1 \rightarrow x = 2^1 = 2 \\ A = \frac{1}{3} \rightarrow \log_2 x = \frac{1}{3} \rightarrow x = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} \end{cases}$$

**تست:** یکی از جواب های معادله  $(\log_{\frac{x}{y}})^2 - 9\log_{\frac{x}{y}} = 4$  کددام است؟

۲۷ (۴)       $\frac{1}{2}$  (۳)      -۱۶ (۲)      ۱۸ (۱)

$$(\log_{\frac{x}{y}})^2 - 9\log_{\frac{x}{y}} = 4$$

$$(\log_{\frac{x}{y}})^2 - 9\log_{\frac{x}{y}} = 4 \xrightarrow{\log_{\frac{x}{y}} = t} t^2 - 9t - 4 = 0 \cdot \begin{cases} t = 4 \\ t = -1 \end{cases}$$

$$t = 4 \Rightarrow \log_{\frac{x}{y}} = 4 \Rightarrow 2^4 = x \Rightarrow x = 16$$

$$t = -1 \Rightarrow \log_{\frac{x}{y}} = -1 \Rightarrow 2^{-1} = x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

**تذکر:** در برخی از معادلات که معمولاً به صورت توانی است، با گرفتن لگاریتم از دو طرف آن، حل می شود.

**مثال:** معادله ی  $4 = (\log_2 x)^{\log_2 x}$  را حل کنید.

**پاسخ:** از دو طرف تساوی در مبنای ۲ لگاریتم می گیریم:

$$\rightarrow \log_2 x \log_2 (\log_2 x)^{\log_2 x} = \log_2 4 \rightarrow (\log_2 x)(\log_2 \log_2 x) = \log_2 2^2 = 2(\log_2 2 + \log_2 x) = 2$$

$$\xrightarrow{A = \log_2 x} A(1 + A) = 2 \rightarrow A^2 + A - 2 = 0 \rightarrow (A + 2)(A - 1) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} A = \log_2 x = -2 \rightarrow x = 2^{-2} = \frac{1}{4} \\ A = \log_2 x = 1 \rightarrow x = 2^1 = 2 \end{cases}$$

## بخش چهارم: رسم نمودار توابع لگاریتمی به کمک انتقال

برای رسم نمودار تابع  $y = f(x) + a$  کافی است نمودار تابع  $y = f(x)$  را به اندازه  $a$

واحدبه سمت بالا انتقال دهیم.

برای رسم نمودار تابع  $y = f(x) - a$  کافی است نمودار تابع  $y = f(x)$  را به اندازه  $a$

واحدبه سمت پایین انتقال دهیم.

## انتقال عرضی (آسانسوری)

برای رسم نمودار تابع لگاریتمی به فرم  $y = \log_a x + c$  کافی است نمودار تابع  $y = \log_a x$  به اندازه

$c$  واحدبه سمت بالا انتقال دهیم.

برای رسم نمودار تابع لگاریتمی به فرم  $y = \log_a x - c$  کافی است نمودار تابع  $y = \log_a x$  را به

اندازه  $c$  واحدبه سمت پایین انتقال دهیم.

تذکره ۱: در رسم این توابع نمودار به خط  $x = 0$  (محور  $y$ ) نزدیک می شود.

تذکره ۲: با جایگذاری عدد صفر به جای  $y$  و حل معادله لگاریتمی محل برخورد نمودار با محور  $x$  را به دست می

آوریم.

**مثال:** برای رسم نمودار تابع  $y = \log_2 x + 1$  کافیست نمودار  $y = \log_2 x$  را به اندازه  $1$  واحد به

جهت تهیه جزوه کامل فصل سوم حسابان یازدهم ریاضی به شماره ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ و یا به آیدی تلگرام

@habib\_hashemi پیام دهید.

(هزینه جزوه کامل ۵۰۰۰ تومان)

جهت تهیه جزوات کنکوری تمام مباحث ریاضی تالیف حبيب هاشمی کارشناس ارشد ریاضی کاربردی با نوزده سال سابقه تدریس  
دربزرگاری کلاس های کنکور؛ دبیر رسمی آموزش و پرورش منطقه ۴ تهران و مدرس دانشگاه با شماره ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس بگیرید و یا  
به آیدی تلگرام @habib\_hashemi پیام دهید.

اینستاگرام: [riazi.academy](https://www.instagram.com/riazi.academy)

جزوه کنکوری تمام مباحث ریاضیات تالیف حبيب هاشمی در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour



موفق بودن در ریاضی ادرصد استعداد و ۹۹ درصد پشتکار

## تدریس خصوصی ریاضیات

متوسطه اول و متوسطه دوم

کنکور- تقویتی

گروهی / انفرادی

به صورت تخصصی و کاملا مفهومی با جزوه اختصاصی

مشاهده جزوات در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour

دبیر رسمی آموزش و پرورش با ۱۹ سال سابقه تدریس

کارشناس ارشد ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

مؤلف شش کتاب در زمینه کنکور

نویسنده برتر استان

معلم نمونه شهرستان و استان

نفر اول استان در جشنواره الگوهای برتر تدریس

نفر اول کشور در جشنواره الگوهای برتر تدریس

شماره تماس: ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

