

$$\frac{x}{x^2-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{x-2}{x^2-x} \quad (1)$$

الف) ابتدا در صورت امکان مخرج کسرها را به حاصل ضرب عامل های اول تجزیه می کنیم:

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)} - \frac{2}{x+1} = \frac{x-2}{x(x-1)} \quad (2)$$

ب) در مخرج ها سه نوع عامل اول متمایز وجود دارد: x ، $(x+1)$ و $(x-1)$. که بزرگ ترین توان هر کدام از آنها برابر 1 است؛ پس کم مخرج ها عبارت است از $x(x-1)(x+1)$

پ) طرفین معادله (2) را در $x(x-1)(x+1)$ ضرب می کنیم تا معادله از شکل کسری خارج

شود.

$$x(x-1)(x+1) \left[\frac{x}{(x-1)(x+1)} - \frac{2}{x+1} \right] = x(x-1)(x+1) \left[\frac{x-2}{x(x-1)} \right]$$

$$\Rightarrow x(x-1)(x+1) \times \frac{x}{(x-1)(x+1)} - x(x-1)(x+1) \times \frac{2}{x+1} = (x+1)(x-2)$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x(x-1) = (x+1)(x-2) \Rightarrow x^2 - 2x^2 + 2x = x^2 - x + 2$$

$$\Rightarrow -2x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm 5}{-4} \Rightarrow x = 2, x = -\frac{1}{2}$$

2) خط یک متروی تهران به طول 60 کیلومتر، میدان تجریش را به فرودگاه بین المللی امام خمینی (ره) متصل می کند. برای انجام یک آزمایش، قطاری مسیر شمال به جنوب این خط را با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت و بدون توقف در ایستگاه ها طی می کند. اگر در مسیر جنوب به شمال، از سرعت متوسط قطار 10 km/h کاسته شود، زمان بازگشت نیم ساعت طولانی تر از زمان رفت خواهد شد.

الف) توضیح دهید، چرا زمان رفت از رابطه $\frac{60}{v}$ به دست می آید؟

می دانیم مسافت طی شده برابر است با سرعت متوسط ضرب در زمان یعنی $x = v.t$ در نتیجه اگر زمان رفت را با t_1 نمایش دهیم داریم:

$$x = v.t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{x}{v} \Rightarrow t_1 = \frac{60}{v}$$

ب) عبارتی بر حسب v بنویسید که زمان برگشت را نشان دهد.

زمان بازگشت را با t_2 نمایش می دهیم و می دانیم که از سرعت قطار 10 km/h کاسته شده است. پس داریم:

$$60 = (v-10) \times t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{60}{v-10}$$

پ) معادله $\frac{60}{v-10} = \frac{60}{v} + \frac{1}{4}$ را توضیح دهید.

با توجه به این که زمان بازگشت نیم ساعت ($\frac{1}{4}$ ساعت) طولانی تر بوده است پس داریم:

$$t_2 = t_1 + \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{60}{v-10} = \frac{60}{v} + \frac{1}{4}$$

ت) طرفین این معادله را در کم مخرج ها ضرب کنید تا به یک معادله درجه دوم تبدیل شود.

$$2v(v-10) \left(\frac{60}{v-10} \right) = 2v(v-10) \times \frac{60}{v} + 2v(v-10) \times \frac{1}{4} \quad \text{کم مخرج ها: } 2v(v-10) \text{ است. در نتیجه:}$$

$$\Rightarrow 120v = 120v - 1200 + v^2 - 10v$$

$$\Rightarrow v^2 - 10v - 1200 = 0$$

تهیه و تنظیم: عطیه تبریزی

$$v^2 - 10v - 1200 = 0 \Rightarrow \Delta = 4900 \Rightarrow v = \frac{10 \pm 70}{2}$$

$$v = 40 \text{ km/h}, \quad v = -30$$

سرعت قطار در مسیر شمال به جنوب رفت 40 km/h است. (البته سرعت برگشت با توجه به علامت منفی 30 km/h است.)

ث) از حل معادله حاصل، سرعت قطار در مسیر رفت را بیابید و به کمک آن زمان رفت و برگشت قطار را به دست آورید.

$$\text{زمان رفت: } t_1 = \frac{60}{40} = 1/5 \text{ h} \quad \text{و زمان برگشت: } t_2 = \frac{60}{-30} = 2 \text{ h}$$

کار در کلاس ص ۲۲ فصل اول درس سوم کتاب ریاضی یازدهم تجربی

کار در کلاس

۱) معادلات زیر را حل کنید. آیا تمام جواب‌های به دست آمده مورد قبول هستند؟

الف) $\frac{3}{x^2} - 12 = 0$

$$x^2 \times \frac{3}{x^2} - x^2 \times 12 = x^2 \times 0$$

$$\Rightarrow 3 - 12x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

ب) $\frac{2}{k} - \frac{3k}{k+2} = \frac{k}{k^2+2k}$

$$\frac{2}{k} - \frac{3k}{k+2} = \frac{k}{k(k+2)}$$

$$\Rightarrow k(k+2) \times \frac{2}{k} - k(k+2) \times \frac{3k}{(k+2)} = k(k+2) \times \frac{k}{k(k+2)}$$

$$2k+4-3k^2 = k \Rightarrow -3k^2+k+4=0 \Rightarrow \Delta = 49 \Rightarrow k = \frac{1}{3}, k = -1$$

پ) $\frac{3}{x} - \frac{2}{x-3} = \frac{12}{9-x^2}$

$$\frac{3}{x} - \frac{2}{x-3} = \frac{12}{(3-x)(3+x)} \Rightarrow \frac{3}{x} - \frac{2}{-(3-x)} = \frac{12}{(3-x)(3+x)} \Rightarrow \frac{3}{x} + \frac{2}{3-x} = \frac{12}{(3-x)(3+x)}$$

$$x(3-x)(3+x) \times \frac{3}{x} + x(3-x)(3+x) \times \frac{2}{3-x} = x(3-x)(3+x) \times \frac{12}{(3-x)(3+x)}$$

$$27 - 3x^2 + 6x + 2x^2 = 12x \Rightarrow -x^2 - 6x + 27 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x - 27 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x+9) = 0 \Rightarrow x = -9, \quad x = 3 \text{ غ ق}$$

همانطور می دانیم اگر مخرج کسری صفر شود آن کسر تعریف نمی شود بنابراین عدد 3 نمی تواند جواب این معادله باشد زیرا مخرج کسر دوم را صفر می کند.

۲) دبیر ریاضی آتیلا هر هفته یک آزمون 10 امتیازی برگزار می کند. پس از 5 هفته، آتیلا جمعاً 36 امتیاز کسب کرده بود؛ یعنی میانگین امتیاز هر آزمون او در پنج هفته اول به صورت

$$\frac{36}{5} = 7/2$$

زیر بود:

او از هفته ششم به بعد در تمام آزمون‌ها امتیاز 9 را کسب کرد به طوری که میانگین امتیاز کل آزمون‌هایش برابر 8 شد. می خواهیم بدانیم از هفته ششم به بعد، آتیلا در چند آزمون متوالی نمره 9 گرفته است.

الف) اگر تعداد آزمون‌ها از هفته ششم به بعد n باشد، مجموع امتیازات او در این مدت $9n$ خواهد شد. عبارتی کسری بر حسب n بنویسید که نشان دهنده میانگین امتیاز تمام آزمون‌های ریاضی هفتگی آتیلا باشد.

$$\frac{9n + 36 \dots}{5 + \dots n \dots}$$

تعداد کل آزمون‌هایی که تا به حال داده است: $5+n$ و تعداد کل امتیازهای به دست آمده: $9n+36$ می باشد:

ادامه ی کار در کلاس ص ۲۲ فصل اول درس سوم کتاب ریاضی یازدهم تجربی

ب) کسر مربوط به قسمت قبل را برابر ۸ قرار دهید و n را بیابید. سپس جواب به دست آمده را امتحان کنید.

$$\frac{9n+36}{n+5} = 8 \Rightarrow (n+5) \times \frac{9n+36}{n+5} = (n+5) \times 8 \Rightarrow 9n+36 = 8n+40 \Rightarrow n=4$$

$$\frac{9 \times 4 + 36}{4+5} = \frac{72}{9} = 8$$

۳ یک معادله گویا بنویسید که جمله زیر را نقض کند :

جواب هیچ معادله گویا نمی تواند صفر باشد.

$$\frac{-3}{x-3} = 1 \text{ یا } \frac{x}{x+1} = 0$$

کار در کلاس ص ۲۳ فصل اول درس سوم کتاب ریاضی یازدهم تجربی

کار در کلاس

۱ معادلات زیر را حل کنید. آیا تمام جواب های حاصل، مورد قبولند؟

(الف) $2\sqrt{2t-1} - t = 1$

$$(2\sqrt{2t-1})^2 = (t+1)^2 \Rightarrow 4(2t-1) = t^2 + 2t + 1$$

$$\Rightarrow 8t - 4 = t^2 + 2t + 1 \Rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0$$

$$\Rightarrow (t-1)(t-5) = 0 \Rightarrow t=1, t=5$$

$$t=5 \Rightarrow 2\sqrt{10-1} - 5 = 1 \Rightarrow 6 - 5 = 1 \Rightarrow 1=1$$

$$t=1 \Rightarrow 2\sqrt{2-1} - 1 = 1 \Rightarrow 2 - 1 = 1 \Rightarrow 1=1$$

هر دو جواب قابل قبول هستند.

(ب) $\sqrt{x+7} = \sqrt{x} + 1$

$$(\sqrt{x+7})^2 = (\sqrt{x} + 1)^2 \Rightarrow x+7 = x+2\sqrt{x}+1$$

$$\Rightarrow 6 = 2\sqrt{x} \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = 3^2 \Rightarrow x=9$$

$$x=9 \Rightarrow \sqrt{9+7} = \sqrt{9} + 1 \Rightarrow 4 = 4$$

(ث) $2 + \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x - 2 \Rightarrow (\sqrt{2x^2 - 5x + 2})^2 = (x-2)^2 \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x=2, x=-1$$

$$x=2 \Rightarrow 2 + \sqrt{8-10+2} = 2 \Rightarrow 2+0 = 2 \Rightarrow 2=2, \quad x=-1 \Rightarrow 2 + \sqrt{2-5+2} = -1 \Rightarrow 2 + \sqrt{-1} = -1$$

واضح است که $x=-1$ قابل قبول نیست

(ب) $2x = 1 - \sqrt{2-x}$

$$(\sqrt{2-x})^2 = (1-2x)^2 \Rightarrow 2-x = 1-4x+4x^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 \Rightarrow x=1, x = -\frac{1}{4}$$

$$x = -\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{2} = 1 - \sqrt{2 + \frac{1}{4}} \Rightarrow -\frac{1}{2} = 1 - \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$x=1 \Rightarrow 2 = 1 - \sqrt{2-1} \Rightarrow 2 = 0$$

واضح است که $x=1$ قابل قبول نیست.

(ت) $\frac{1}{\sqrt{u-3}} - \frac{2}{\sqrt{u}} = 0$

$$\frac{1}{\sqrt{u-3}} = \frac{2}{\sqrt{u}} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{u-3}}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{u}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u-3} = \frac{4}{u} \Rightarrow u(u-3) \times \frac{1}{(u-3)} = u(u-3) \times \frac{4}{u}$$

$$\Rightarrow u = 4u - 12 \Rightarrow 12 = 3u \Rightarrow u = 4$$

$$u=4 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4-3}} - \frac{2}{\sqrt{4}} = 0 \Rightarrow 1-1 = 0 \Rightarrow 0=0$$

ادامه ی کار در کلاس ص ۲۳ فصل اول درس سوم کتاب ریاضی یازدهم تجربی

۲ زمانی که یک شیء از بالای ساختمان به ارتفاع ۵ متر سقوط آزاد می کند، پس از t ثانیه

در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار دارد به طوری که $t = \sqrt{10 - \frac{h}{5}}$.

این جسم، یک ثانیه پس از سقوط در چه ارتفاعی نسبت به سطح زمین قرار دارد؟

$$t = 1 \Rightarrow 1 = \sqrt{10 - \frac{h}{5}} \Rightarrow 1^2 = \left(\sqrt{10 - \frac{h}{5}}\right)^2 \Rightarrow 1 = 10 - \frac{h}{5} \Rightarrow \frac{h}{5} = 9 \Rightarrow h = 45 \text{ m}$$

۳ بدون حل معادله، توضیح دهید که چرا معادلات زیر فاقد ریشه حقیقی هستند؟

(الف) $\sqrt{t} + 2 = 0$

در مجموعه ی اعداد حقیقی \sqrt{t} با فرض با معنی بودن همیشه بزرگ تر یا مساوی صفر است. و وقتی این رادیکال با ۲ جمع شود هرگز صفر نمی شود.

(ب) $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x+3} + 1 = 0$

در مجموعه ی عدد های حقیقی (با فرض با معنی بودن) هر کدام از رادیکال ها عددی بزرگ تر یا مساوی صفر هستند و وقتی با عدد ۱ جمع شوند هرگز صفر نمی شوند.

(پ) $\sqrt{1-x} + \sqrt{x-2} = 0$

روش اول: در مجموعه ی اعداد حقیقی (با فرض با معنی بودن) هر یک از رادیکال ها بزرگ تر یا مساوی صفر هستند و زمانی جمع آن ها صفر است که هر دو همزمان صفر باشند ولی این اتفاق نمی افتد.

روش دوم: $\sqrt{1-x} = -\sqrt{x-2}$ ، طرف چپ تساوی عبارت بزرگ تر یا مساوی صفر است و لی طرف دیگر کوچکتر یا مساوی صفر است و این تساوی فقط زمانی برقرار است که دو طرف صفر باشند. واضح است نمی توانیم عددی مشترک پیدا کنیم که همزمان دو رادیکال را صفر کند. پس این معادله در مجموعه ی اعداد حقیقی جواب ندارد.
به عبارت دیگر جواب مشترک دو معادله ی زیر در صورت وجود جواب معادله است.

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{1-x} = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \sqrt{x-2} = 0 \Rightarrow x = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{جواب مشترک ندارد}$$

پس این معادله در مجموعه ی اعداد حقیقی جواب ندارد.

۴ عددی صحیح بیابید که تفاضل آن از جذرش برابر نصف آن باشد. مسئله چند جواب

دارد؟

$$\sqrt{x} - x = \frac{x}{4} \Rightarrow 2\sqrt{x} - 2x = x \Rightarrow 2\sqrt{x} = 3x \Rightarrow (2\sqrt{x})^2 = (3x)^2 \Rightarrow 4x = 9x^2 \Rightarrow 9x^2 - 4x = 0$$

$$\Rightarrow x(9x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = \frac{4}{9}$$

با توجه به این که عدد باید صحیح باشد بنا براین فقط $x = 0$ قابل قبول است.

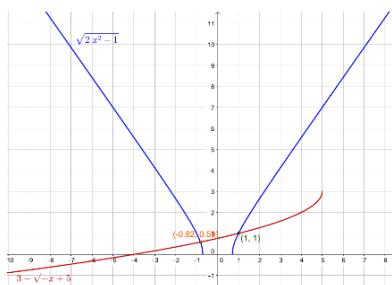
۵ معادله ای شامل مجموع دو عبارت رادیکالی بنویسید که عدد ۱ یکی از ریشه های آن

باشد. پاسخ خود را با پاسخ دوستان خود مقایسه کنید.

$$(1) \quad \sqrt{2x^2 - 1} + \sqrt{-x + 5} = 3 \quad (2) \quad \sqrt{2-x} + \sqrt{x+3} = 3$$

جواب های ۱ با نمودار بررسی شده است.

تهیه و تنظیم: عطیه تبریزی



۱ هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

(الف) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = 5$

$$x(x-2) \times \frac{1}{x} + x(x-2) \times \frac{1}{(x-2)} = x(x-2) \times 5$$

$$x-2+x=5x^2-10x \Rightarrow 5x^2-12x+2=0$$

$$\Delta = 10^2 - 4 \Rightarrow x = \frac{12 \pm 2\sqrt{26}}{10}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند زیرا هیچ یک مخرج را صفر نمی کنند.

(ب) $\frac{10}{r} - \frac{15}{2} = \frac{20}{3r} - 5$

$$6r \times \frac{10}{r} - 6r \times \frac{15}{2} = 6r \times \frac{20}{3r} - 6r \times 5$$

$$60 - 45r = 40 - 30r \Rightarrow 20 = 15r \Rightarrow r = \frac{4}{3}$$

$$\frac{10}{\frac{4}{3}} - \frac{15}{2} = \frac{20}{3 \times \frac{4}{3}} - 5 \Rightarrow \frac{30}{4} - \frac{15}{2} = \frac{5}{1} - 5 \Rightarrow 0 = 0$$

(پ) $\frac{2x}{x-3} + \frac{x+1}{x+4} = \frac{x-1}{x-3}$

$$(x-3)(x+4) \times \frac{2x}{(x-3)} + (x-3)(x+4) \times \frac{(x+1)}{(x+4)} = (x-3)(x+4) \times \frac{(x-1)}{(x-3)}$$

$$2x^2 + 8x + x^2 - 2x - 3 = x^2 + 3x - 4 \Rightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\Delta = 1 \Rightarrow x = -1, x = -\frac{1}{2}$$

هر دو ریشه قابل قبول است زیرا هیچ یک باعث شدن مخرج ها نمی شوند.

(ت) $\sqrt{t+4} = 3$

$$(\sqrt{t+4})^2 = 3^2$$

$$\Rightarrow t+4=9$$

$$\Rightarrow t=4$$

$$\Rightarrow \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \neq 3$$

(ث) $k = \sqrt{6k-8}$

$$k^2 = (\sqrt{6k-8})^2 \Rightarrow k^2 = 6k-8$$

$$\Rightarrow k^2 - 6k + 8 = 0 \Rightarrow (k-4)(k-2) = 0$$

$$\Rightarrow k=4, k=2$$

$$k=4 \Rightarrow 4 = \sqrt{24-8} \Rightarrow 4=4$$

$$k=2 \Rightarrow 2 = \sqrt{12-8} \Rightarrow 2=2$$

هر دو ریشه قابل قبول هستند.

(ج) $x + \sqrt{x} = 6$

$$\sqrt{x} = 6-x \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = (6-x)^2 \Rightarrow x = 36 - 12x + x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-9) = 0$$

$$\Rightarrow x=4, x=9$$

$$x=4 \Rightarrow 4 + \sqrt{4} = 6 \Rightarrow 6=6$$

$$x=9 \Rightarrow 9 + \sqrt{9} = 6 \Rightarrow 12=6, 12 \neq 6$$

همانطور که دیده می شود $x=9$ قابل قبول نیست.

(چ) $\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = 1$

$$\sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{2x-5} \Rightarrow (\sqrt{x+1} - 1)^2 = (\sqrt{2x-5})^2$$

$$\Rightarrow x+1 - 2\sqrt{x+1} + 1 = 2x-5 \Rightarrow -2\sqrt{x+1} = x-7$$

$$\Rightarrow (-2\sqrt{x+1})^2 = (x-7)^2 \Rightarrow 4x+4 = x^2 - 14x + 49$$

$$\Rightarrow x^2 - 18x + 45 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-15) = 0$$

$$\Rightarrow x=3, x=15$$

$$x=3 \Rightarrow \sqrt{4} - \sqrt{1} = 1 \Rightarrow 1=1$$

$$x=15 \Rightarrow \sqrt{16} - \sqrt{25} = 1 \Rightarrow -1=1, -1 \neq 1$$

همانطور که دیده می شود $x=15$ قابل قبول نیست.

(ح) $\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} = 2$

$$\sqrt{m} \times \sqrt{m} + \sqrt{m} \times \frac{1}{\sqrt{m}} = \sqrt{m} \times 2 \Rightarrow m+1 = 2\sqrt{m}$$

$$\Rightarrow (m+1)^2 = (2\sqrt{m})^2 \Rightarrow m^2 + 2m + 1 = 4m$$

$$\Rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Rightarrow (m-1)^2 = 0 \Rightarrow m=1$$

$$m=1 \Rightarrow \sqrt{1} + \frac{1}{\sqrt{1}} = 2 \Rightarrow 2=2$$

همانطور که ملاحظه می شود معادله یک جواب قابل قبول دارد.

ادامه ی تمرین های صفحه ی ۲۴ فصل اول درس سوم کتاب ریاضی یازدهم تجربی

۲ علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجله ادبی ۱۶ صفحه ای منتشر می کند. پس از تایپ مطالب، او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می کند. اگر رضا به او کمک نماید، کار ویرایش حدود ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می انجامد. حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از مجله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟

تعداد صفحه ها : ۱۶

زمانی که علی برای ۱۶ صفحه صرف می کند : ۲ ساعت یا ۱۲۰ دقیقه پس در ۱ دقیقه $\frac{۱۶}{۱۲۰}$ صفحه ویرایش می کند.

زمانی که علی و رضا باهم صرف ویرایش ۱۶ صفحه می کنند : ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه یعنی ۸۰ دقیقه پس در ۱ دقیقه باهم $\frac{۱۶}{۸۰}$ صفحه ویرایش می کنند.

اگر زمانی را که رضا صرف ویرایش ۱۶ صفحه به تنهایی می کند x در نظر بگیریم پس در یک دقیقه $\frac{۱۶}{x}$ صفحه ویرایش می کند. پس داریم :

$$\frac{۱۶}{۱۲۰} + \frac{۱۶}{x} = \frac{۱۶}{۸۰} \Rightarrow \frac{۱}{۱۲۰} + \frac{۱}{x} = \frac{۱}{۸۰} \Rightarrow ۲۴۰ \times x \times \frac{۱}{۱۲۰} + ۲۴۰ \times x \times \frac{۱}{x} = ۲۴۰ \times x \times \frac{۱}{۸۰}$$

$$۲x + ۲۴۰ = ۳x \Rightarrow x = ۲۴۰$$

۳ فرمول $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ زمان نوسان (یک حرکت رفت و برگشت) پاندولی به طول l متر را بر حسب ثانیه نشان می دهد. اگر هر نوسان یک پاندول $1/5$ ثانیه زمان ببرد، مطلوب است محاسبه طول آونگ. (مقدار g را برابر $9/8 \text{ m/s}^2$ قرار دهید)

$$1/5 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{9/8}} \Rightarrow 2/25 = 4\pi^2 \times \frac{1}{9/8} \Rightarrow l = \frac{2/25 \times 9/8}{4\pi^2}$$

۴ اگر دو ماشین چمن زنی باهم کار کنند، می توانند در ۴ ساعت چمن یک زمین فوتبال را کوتاه کنند. با فرض اینکه سرعت کار یکی از آنها دو برابر دیگری باشد، حساب کنید هر یک از آنها به تنهایی در چند ساعت می توانند این کار را انجام دهند؟

می دانیم که زمان و سرعت نسبت عکس دارند. پس اگر ماشین دوم سرعتش دو برابر ماشین اول باشد آنگاه زمانی که ماشین اول مصرف می کند دو برابر زمانی است که ماشین دوم مصرف می کند. پس اگر سرعت دستگاه اول را v در نظر بگیریم آنگاه سرعت دستگاه دوم $2v$ پس زمانی که ماشین اول مصرف می کند را $2t$ و زمانی که ماشین دوم مصرف می کند t است.

ماشین اول در یک ساعت $\frac{1}{2t}$ ام از کار را انجام می دهد و ماشین دوم در یک ساعت $\frac{1}{t}$ ام کار را انجام می دهد و هر دو باهم در یک ساعت $\frac{1}{4}$ ام از کار را انجام می دهد :

$$\frac{1}{2t} + \frac{1}{t} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4t \times \frac{1}{2t} + 4t \times \frac{1}{t} = 4t \times \frac{1}{4} \Rightarrow 2 + 4 = t \Rightarrow t = 6 \text{ ساعت}$$

پس ماشین دوم در ۶ ساعت و ماشین اول در ۱۲ ساعت می توانند کار را انجام دهد.