بسم الله الرحمن الرحیم

جزوه ریاضی (۱)

رشته‌های ریاضی و فیزیک ــ علوم تجربی

پایه دهم

متوسطه دوم

وب‌سایت مدرسه سوم

فصل ۶

شمارش، بدون شمردن

وَ إِنْ تَعُدُّواْ نِعْمَةَ اللّٰهِ لا تُحْصُوهٰا «سورهٔ ابراهیم آیهٔ ۳۴»
و اگر بخواهید نمی‌توانید نعمت‌های خدا را بشمارید.

داشتن حداقل چند رنگ کافی است تا هر نقشه‌ای را بتوان به گونه‌ای رنگ‌آمیزی کرد که هیچ دو ناحیهٔ هم‌مرزی هم‌رنگ نباشند؟

فصل ۶

آنالیز ترکیبی

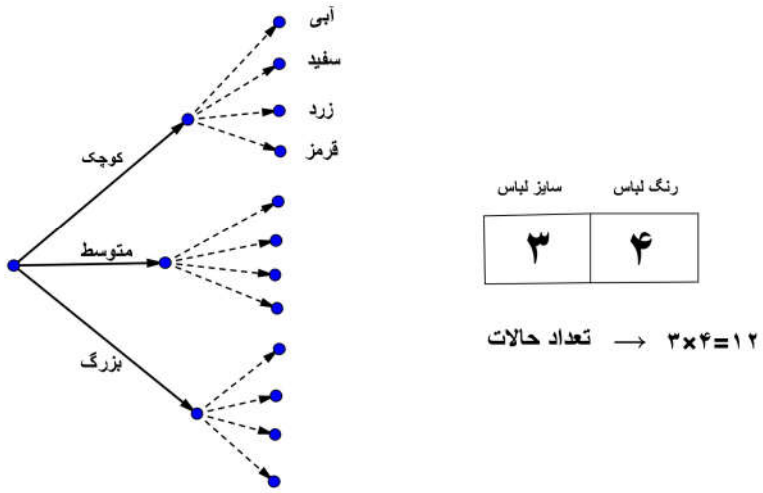
انسان قبل از اینکه نوشتن و خواندن بیاموزد با شمارش سروکار داشته است. در آنالیز ترکیبی یا ترکیبیات با شمارش سروکار داریم اما نه شمارش معمولی. در واقع شمارش در اینجا حالت تخصصی‌تری به خود می‌گیرد. حدود ۲۰۰ سال از عمر این شاخه از ریاضیات می‌گذرد و بیشترین پیشرفت ترکیبیات در ۵۰ تا ۶۰ سال گذشته شکل گرفته است. با پیدایش کامپیوتر و ساده شدن محاسبات طولانی به کمک آن ، برخی مسائل که قبلا حلشان دشوار می‌نمود. رابطه‌ی کامپیوتر و ترکیبیات رابطه‌ی دوسویه بوده است.[۱] خیلی از الگوریتم هایی که در کامپیوتر اجرا می‌شوند به مدد ترکیبیات نوشته شده‌اند. در این فصل ابتدا اصول مقدماتی شمارش را بیان کرده و جایگشت و ترکیب را در ادامه فصل بررسی می‌کنیم.

۱.۶ اصل ضرب و جمع

برای روشن شدن مطلب اجازه دهید مثالی ساده را بررسی کنیم.

[۱] در این زمینه قضیه چهاررنگ مثالی جالب است.قَضیّهٔ چهاررَنگ یا حدس چهاررنگ از مسائل مشهور و قدیمی ریاضیات است که سال‌ها اثبات نشده مانده بود. به بیان ساده (و نادقیق) این قضیه می‌گوید: «برای رنگ کردن هر نقشه به طوری که کشورها و نواحی همسایه در نقشه هم‌رنگ نباشند فقط چهار رنگ کافی است». سه رنگ برای نقشه های ساده تر کافیست ولی یک رنگ چهارم اضافی برای برخی نقشه ها لازم است. قضیه ۵ رنگ که اثباتی کوتاه و ابتدایی دارد، بیان می کند که ۵ رنگ برای رنگ آمیزی نقشه کافیست . این قضیه در اواخر قرن ۱۹ اثبات شده است(هیووو ۱۸۹۰). اثبات اینکه ۴ رنگ کافیست بسیار سخت تر است. این مسئله به صورت معادله ابتدا درسال۱۸۵۲ عنوان شد و سرانجام در سال ۱۹۷۶ با کمک رایانه توسط کنت اپل و ولفگانگ هیکن حل شد. این اولین قضیه مهمی بود که با استفاده از کامپیوتر به اثبات رسید. آنها نشان دادند که مجموعه ای از ۱۹۳۶ نقشه وجود دارد که هیچ کدام از آنها نمی‌توانند قسمتی از یکی از کوچکترین مثال نقض های قضیه چهار رنگ باشند. اپل و هیکن از یک برنامه کامپیوتری خاص استفاده کردند تا ثابت کنند هیچ کدام از این نقشه ها از این قاعده مستثنی نیستند. علاوه بر این هر نقشه ای فارغ از این که مثال نقض هست یا نه، حتماً قسمتی را شامل می شود که شبیه یکی از آن ۱۹۳۶ نقشه می باشد و اثبات این نیاز به صدها صفحه تحلیل دست نویس بود. اپل و هیکن نتیجه گرفتند که اگر بخواهد کوچکترین مثال نقضی وجود داشته باشد باید شامل یکی از آن ۱۹۳۶ نقشه باشد. این تناقض به این معنی بود که هیچ مثال نقضی وجود ندارد و قضیه درست می باشد. در ابتدا اثبات آنها از طرف همه ریاضیدان ها مورد تایید واقع نشد، چرا که چک کردن یک اثبات کامپیوتری توسط انسان امکان پذیر نبود.

مثال ۱.۶. یک شرکت تولید پوشاک ورزشی لباس‌های ورزشی را در ۳ اندازه ،کوچک،متوسط و بزرگ و در ۴ رنگ سفید،قرمز،آبی و زرد تولید می‌کند. این تولیدی در مجموع چند نوع لباس متفاوت تولید می‌کند؟



در شکل بالا می‌توان با شمارش مستقیم تعداد لباس‌های تولیدی را یافت. راه دیگر شمارش حرفه‌ای است. دوخانه به‌هم چسبیده را که یکی مربوط به اندازه و دیگری مربوط به رنگ می باشد رسم می‌کنیم. در خانه اولی سه امکان (سه سایز) و در دومی ۴ انتخاب (۴ رنگ) وجود دارد و تعداد کل انتخاب‌ها برابر ۱۲ است.

اصل ضرب : فرض کنید کاری به دو جزء تقسیم شده است،چنانکه جز اول به m طریق انجام شدنی است و جزء دوم مستقل از اولی به n طریق انجام شدنی است. در این صورت این کار به mn طریق انجام شدنی است. البته این اصل قابل تعمیم است. اگر کاری به k طریق مجزا تقسیم شده باشد بطوریکه اولی به m_1 طریق انجام شدنی باشد،دومی به m_2 طریق انجام شدنی باشدو...و k امی به m_k طریق انجام شدنی باشد آنگاه کل کار به $m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_k$ طریق شدنی است.

مثال ۲.۶. از شهر A به شهر B سه راه و از شهر B به شهر C چهارراه وجود دارد.
الف: به چند طریق می توان از شهر A به شهر B رفت؟ به چندطریق می‌توان از شهر B به شهر C رفت؟ به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C رفت؟
ب: به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C رفت و به شهر A برگشت،بطوری‌که هر جاده حداکثر یک بار طی شود؟

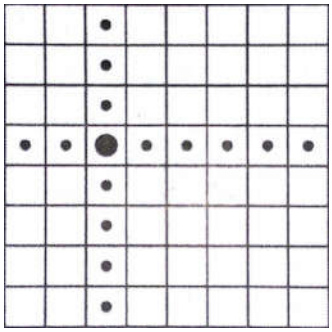
مثال ۳.۶. به چند طریق می‌توان یک کمیته دو نفره از بین ۸ مرد و ۹ زن تشکیل داد؟

مثال ۴.۶. از بین ده زوج (زن و شوهر) چگونه می‌توان یک گروه دونفره تشکیل داد که یک مرد و یک زن درآن باشد و در عین حال این دو زن و شوهر نباشند؟

مثال ۵.۶. چند کلمه سه‌حرفی با حروف e, d, c, b, a می‌توان ساخت؟ در چند کلمه حروف مجاور متمایزند؟ در چند کلمه هر سه حرف متمایزند؟

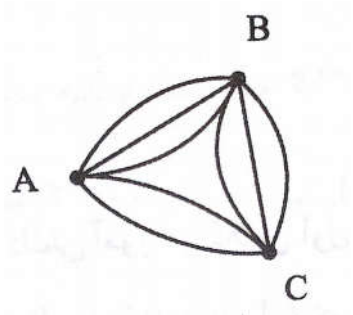
مثال ۶.۶. چند عدد فرد سه رقمی با ارقام متمایز وجود دارد؟

مثال ۷.۶. به چند طریق می‌توان یک رخ سفید و یک رخ مشکی را در یک صفحه شطرنجی ۸ × ۸ قرار داد بطوری‌که یکدیگر را تهدید نکنند؟(رخ همان قلعه است و صرفا افقی و عمودی حرکت می‌کند.)



اصل جمع: فرض کنید کاری را بتوان به دو روش انجام داد طوری‌که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب موجود باشد. در این صورت برای انجام این کار $m+n$ روش وجود دارد.مثل اصل ضرب این اصل نیز قابل تعمیم است.

مثال ۸.۶. بین شهرهای A, B سه جاده ،بین A, C ۲ جاده وبین B, C سه جاده احداث شده است.به چند طریق می‌توان با طی حداکثر دو جاده از A به B رفت؟



مثال ۹.۶. کمیسیون ورزش ۸ عضو و کمیسیون اقتصاد ۱۲ عضو دارد که ۳ عضو آنها مشترک است. می‌خواهیم از بین اعضای هر کمیسیون یک نفر را به عنوان نماینده‌ی کمیسیون انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم به طوری‌که نمایندگان دو کمیسیون دو فرد مختلف باشند؟

مثال ۱۰.۶. با استفاده از ارقام $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ چند عدد طبیعی با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

مثال ۱۱.۶. چند عدد سه رقمی زوج با ارقام متمایز وجود دارد؟

مثال ۱۲.۶. روی تخته سیاه تمام کلمات سه حرفی با استفاده از حروف a, b, c, d, e نوشته‌ایم. چندبار حرف a روی تخته سیاه نوشته شده است؟

مثال ۱۳.۶. با ارقام $\{۰, ۲, ۳, ۷\}$ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت به طوری‌که:

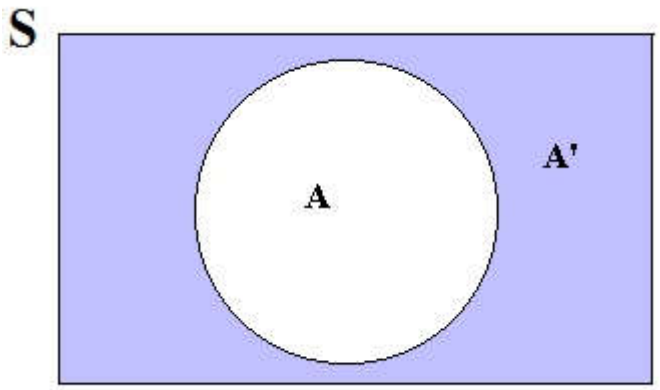
الف: تمام ارقام متمایز باشند.

ب: عدد سه رقمی و فرد با ارقام متمایز باشد.

ج: عدد زوج و سه رقمی با ارقام متمایز باشد.

مثال ۱۴.۶. در چند عدد ۴ رقمی رقم ۵ وجود دارد؟

تذکر مهم: تکنیک به کار رفته در حل مسئله فوق ، استفاده از اصل متمم است. گاهی اوقات شمارش خاصیت ذکر شده در مسئله‌ای به مراتب مشکل‌تر از شمارش اعضایی است که خاصیت ذکرشده را ندارند. در این حالت بهتر است آنهایی که آن ویژگی معین را ندارند (متمم) شمارش شده و از کل اعضای مجموعه اصلی کم شوند.



$$|S| = |A| + |A'|$$

مثال ۱۵.۶. در چند کلمه ۴ حرفی با حروف f, e, d, c, b, a حرف تکراری وجود دارد؟

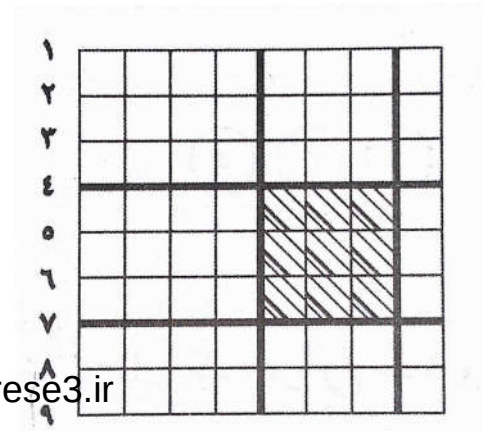
مثال ۱۶.۶. در چند عدد ۴ رقمی بزرگترین رقم برابر ۶ است؟

تمرین ۱.۶. به چند طریق می‌توان یک نفر را از بین ۶ زن و ۸ مرد انتخاب کرد؟

تمرین ۲.۶. به چند طریق می توان ۲ نفر را از بین ۵ کلاس اولی،۷کلاس دومی و ۶ کلاس سومی انتخاب کرد بطوریکه این دو نفر هم کلاس نباشند؟

تمرین ۳.۶. چند عدد فرد چهاررقمی با ارقام متمایز وجود دارد؟

تمرین ۴.۶. چند مربع ۳ × ۳ در یک صفحه شطرنجی ۸ × ۸ وجود دارد؟



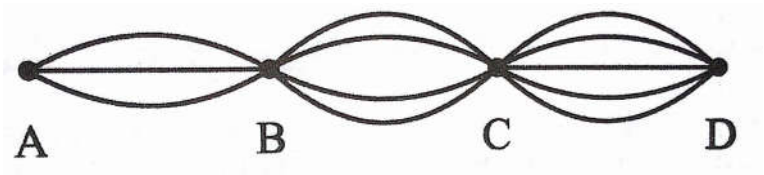
تمرین ۵.۶. الف: به چند طریق می‌توان یک مهره سفید و یک مهره سیاه را در دو خانه از صفحه شطرنجی ۸ × ۸ قرار داد بطوری‌که در یک سطر یا یک ستون باشند؟

ب: به چند طریق می‌توان ۳ مهره‌ی متمایز را درسه خانه از صفحه شطرنجی ۸ × ۸ قرار داد بطوری‌که هیچ دوتایی در یک سطر یا ستون قرار نگیرند؟

تمرین ۶.۶. الف :با توجه به شکل زیر به چند طریق می‌توان از A به D رفت؟

ب: به چند طریق می‌توان از A به D رفت و به A برگشت؟

ج: در چند مسیر از مسیرهای قسمت «ب» هر جاده حداکثر یک بار طی شده است؟



تمرین ۷.۶. دو خانه از خانه های شطرنج را مجاورگوییم هرگاه حداقل یک راس مشترک داشته باشند. به چند طریق می‌توان یک مهره سفید و یک مهره‌ی سیاه را در دو خانه مجاور از صفحه شطرنجی ۸ × ۸ قرار داد ؟

تمرین ۸.۶. در چند عدد ۵ رقمی حداقل یکی از دو رقم ۱و۲ وجود دارد؟

تمرین ۹.۶. در چند عدد ۶ رقمی،رقم تکراری وجود ندارد؟

تمرین ۱۰.۶. چند زیر مجموعه از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۰\}$ حداقل دو عضو دارند؟

۲.۶ جایگشت

سه نفر به چند صورت متفاوت می‌توانند در یک ردیف کنار هم ایستاده و عکس بگیرند؟ اگر این سه شخص را با حروف لاتین c, b, a نمایش دهیم، تمام حالات ممکنه در زیر آمده است:

$$abc, acb, bca, bac, cab, aba$$

هر یک از این ۶ حالت را یک جایگشت از سه حرف $\{a, b, c\}$ گوییم. حال اگر ۴ نفر بخواهند در یک ردیف و کنار هم عکس بگیرند چند حالت متفاوت پدید می‌آید؟

$$abcd\,,\ abdc\,,\ acbd\,,\ acdb\,,\ adcb\,,\ adbc$$

$$bacd\,,\ badc\,,\ bcad\,,\ bcda\,,\ bdac\,,\ bdca$$

$$cabd\,,\ cadb\,,\ cbad\,,\ cbda\,,\ cdab\,,\ cdba$$

$$dabc\,,\ dacb\,,\ dbac\,,\ dbca\,,\ dcab\,,\ dcba$$

به کمک اصل ضرب می‌توان تعداد جایگشت‌ها را بدون رسم کردن بدست آورد. تعداد جایگشت‌های ۴ شیء برابر است با $۲۴ = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴$ و تعداد جایگشت‌های ۳ شیء برابر است با $۶ = ۱ \times ۲ \times ۳$. در حالت کلی اگر n شیء متمایز داشته باشیم در این صورت تعداد جایگشت‌های این n شیء برابر است با $n \times (n-۱) \times (n-۲) \cdots \times ۳ \times ۲ \times ۱$:

معرفی یک نماد: حاصلضرب $n \times (n-۱) \times (n-۲) \cdots \times ۳ \times ۲ \times ۱$ را با نماد $n!$ نشان می‌دهیم و n فاکتوریل خوانده می‌شود.

مثال ۱۷.۶. حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

۱) $\frac{۸!}{۵!}$

۲) $\frac{۱۰!}{۸!\,۲!}$

۳) $\frac{۷!\,۴!}{۱۰!}\left(\frac{۸!}{۳!\,۵!} - \frac{۹!}{۲!\,۷!}\right)$

۴) $\frac{n!}{(n-۲)!}$

۵) $\frac{n!}{(n-۳)!}$

۶) $\frac{n!}{(n-k)!}$

۷) $\frac{۵!}{m(m+۱)} \times \frac{(m+۱)!}{(m-۱)!۳!}$

۸) $\frac{m! - (m-۱)!}{(m+۱)!} = \frac{۱}{۶} \longrightarrow m = ?$

مثال ۱۸.۶. الف: ثابت کنید $۱۹(۱۸! + ۱۹!) = ۲۰!$. ب: عبارت $۸ \times ۹ \times \cdots \times ۲۴$ را به نماد فاکتوریل بنویسید. ج: عبارت $۲ \times ۴ \times ۶ \cdots \times ۴۰$ را به نماد فاکتوریل بنویسید. د: عبارت $۱ \times ۳ \times ۵ \cdots \times ۳۹$ را به نماد فاکتوریل بنویسید.

حال تصور کنید هفت شیء متمایز $a_۱, \ldots, a_۵, a_۶, a_۷$ داشته باشیم. می‌خواهیم تعداد جایگشت‌های بطول ۳ (یعنی با سه شیء) را که می‌توان از ۷ شیء فوق ساخت محاسبه کنیم. یک جایگشت بطول ۳ را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc$$

اولین خانه به هفت طریق ، دومین خانه به ۶ طریق و سومین خانه به ۵ طریق پر می‌شود. پس طبق اصل ضرب تعداد چنین جایگشت‌هایی برابر $۷ \times ۶ \times ۵$ است. می‌توان این عبارت را طور دیگری هم نوشت:

$$۷ \times ۶ \times ۵ = ۷ \times ۶ \times ۵ \times \frac{۴!}{۴!} = \frac{۷!}{۴!} = \frac{۷!}{(۷-۳)!}$$

عدد ۳ و ۷ که نقشی اصلی در مسئله داشتند را در آخرین کسر می‌بینیم. در حالت کلی اگر $r \leq n$ باشد و بخواهیم تعداد جایگشت های r شیء را از n شیء بیابیم همانند مثال بالا عمل می کنیم:

$$\underbrace{\bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc \cdots \bigcirc\ \bigcirc}_{\text{r خانه خالی}}$$

اولین خانه دارای n انتخاب،دومین خانه $(n-۱)$ انتخاب،سومین خانه $(n-۲)$ انتخاب ....و r امین خانه دارای $(n-r+۱)$ انتخاب است. حال حاصلضرب این اعداد برابر است با:

$$n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-r+۱) = \frac{n!}{(n-r)!} = p(n,r)$$

عبارت $p(n,r)$ را برای تعداد جایگشت های r شیء از n شیء انتخاب کرده‌ایم. پس تعداد جایگشت‌های rشیء از n شیء یا $p(n,r)$ برابر است با :

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال ۱۹.۶. چند جایگشت از حروف کلمه $table$ با حرف t شروع می‌شود؟

مثال ۲۰.۶. چند جایگشت از حروف کلمه $nature$ به حروف صدادار ختم می‌شوند؟

مثال ۲۱.۶. در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی $logarithm$ عبارت log وجود دارد؟

مثال ۲۲.۶. در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی $triangle$ حروف صدادار مجاورند؟ در چند جایگشت ۵ حرفی با استفاده از حروف این کلمه حرف اول بی‌صدا است؟

مثال ۲۳.۶. در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی $flexicam$ هیچ دو حرف صداداری مجاور نیستند؟

مثال ۲۴.۶. در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی $talking$ بین دو حرف k,t دقیقا دو حرف قرار دارد؟

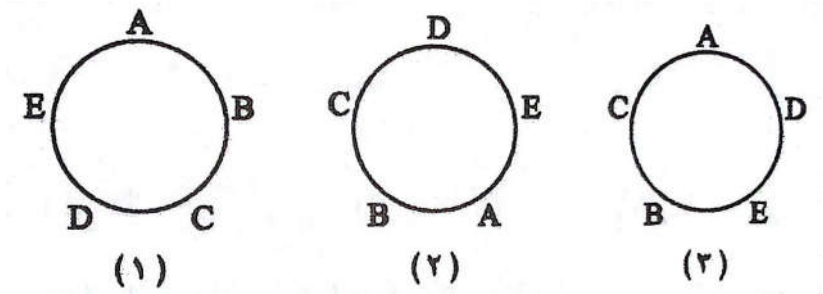
مثال ۲۵.۶. ۴ معلم و ۳ دانش‌آموز به چند طریق می‌توانند در یک ردیف بایستند به طوری‌که هیچ دو معلمی مجاور یکدیگر نباشند؟

مثال ۲۶.۶. با حروف کلمه جهانگردی و بدون تکرار حروف:

۱. چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آن ها به «ی» ختم می‌شود؟
۲. چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که در آن ها حروف «د» و «ی» کنار هم قرار گرفته باشند؟
۳. چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت؟چندتا از آنها به «گردی» ختم می‌شوند؟
۴. چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه «جهان» ۴ حرف اول باشند؟
۵. چند کلمه ۸حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف کلمه «جهان» کنار هم باشند؟
۶. چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که با حروف نقطه‌دار شروع شوند؟

جایگشت‌های دوری

به هر روش قرار گرفتن n شیء دور یک دایره یک جایگشت دوری آن n شیء گوییم،با این ویژگی که اگر یک آرایش از دوران یک آرایش دیگر بدست آید این دو آرایش را هم‌ارز گوییم. در شکل زیر آرایش‌های ۱ و ۲ از جایگشت‌های دوری E, D, E, B, A هم‌ارزند اما این دو با ۳ هم‌ارز نیست.



قضیه: تعداد جایگشت‌های دوری n شیء برابر است با $(n-۱)!$.

مثال ۲۷.۶. در چند جایگشت دوری از حروف کلمه‌ی $triangle$ حروف صدادار مجاورند؟

مثال ۲۸.۶. سه معلم و هشت دانش‌آموز به چند طریق می‌توانند دور یک میز گرد بنشینند بطوریکه هیچ دو معلمی کنار یکدیگر نباشند؟

مثال ۲۹.۶. پنج زوج به چند طریق می‌توانند دور یک میز بنشینند بطوریکه هر فرد کنار همسر خود نشسته باشد؟

تمرین ۱۱.۶. ۶ دکتر و ۵ مهندس را در نظر بگیرید.

۱. به چند طریق می توانند کنار هم بنشینند؟

۲. در چند حالت دکترها مجاور هدیگرند؟

۳. در چند حالت هیچ دو دکتری مجاور یکدیگر نیستند؟

۴. در چند حالت هم دکترها مجاورند و هم مهندسین؟

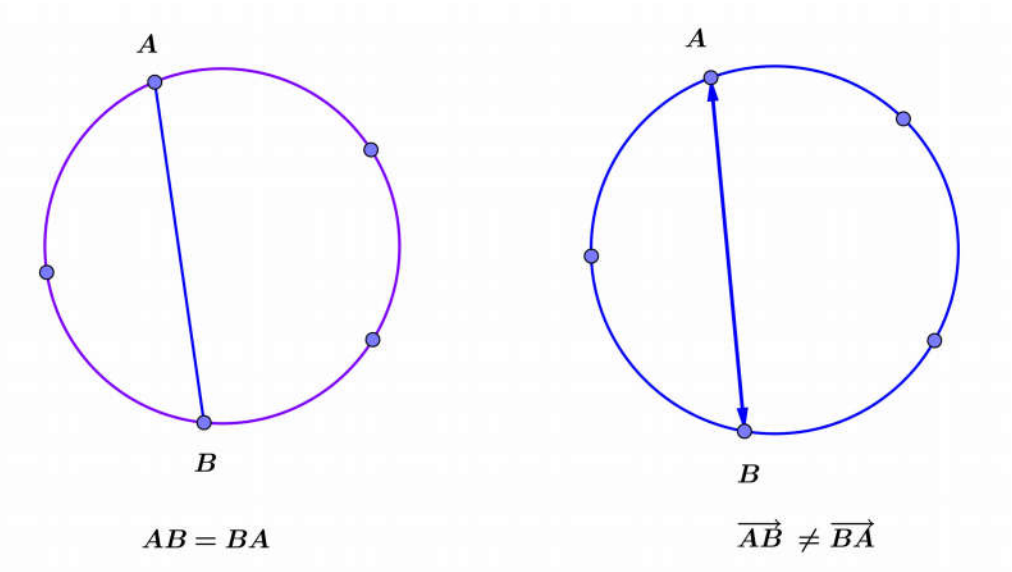
تمرین ۱۲.۶. ۱۱مرد و ۱۴ زن به چندطریق می‌توانند تشکیل ۱۱ زوج بدهند؟

تمرین ۱۳.۶. در چند جایگشت از حروف کلمه $triangle$ حرف t قبل از حرف n قرار دارد؟

تمرین ۱۴.۶. چند جایگشت دوری شامل ۶ حرف از حروف کلمه‌ی $Logarithm$ وجود دارد؟ در چندتا از این جایگشت‌ها حرف t وجود دارد؟در چندتا هر سه حرف صدادار وجود دارد؟در چندتا حداقل یکی از حروف m ، و t وجود دارد؟

۳.۶ ترکیب

به دقت به شکل زیر نگاه کنید.



پنج نقطه روی دایره انتخاب شده‌اند. با این پنج نقطه ده پاره خط متمایز چون AB می‌توان ساخت،اما دو برابر این تعداد یعنی ۲۰ بردار چون $\overrightarrow{AB}$ می‌توان رسم کرد. در واقع $P(۵,۲) = \frac{۵!}{۳!} = ۲۰$.

در این دو مسئله به ظاهر یکسان ترتیب انتخاب بسیار تاثیرگذار است.در انتخاب پاره خط ما با انتخاب هر دو نقطه از بین این ۵ نقطه روی محیط دایره یک پاره خط داریم و این مانند انتخاب زیرمجموعه‌های دو عضوی یک مجموعه ۵ عضوی است که مثلا مجموعه‌های $\{B, A\}$, $\{A, B\}$ یکی هستند. اگر در انتخاب r شیء از میان n شیء $r \leq n$ ترتیب انتخاب مهم نباشد با مسئله ترکیب روبرو هستیم. تعداد راه های انتخاب r شیء بدون اهمیت ترتیب آنها را ترکیب r شیء از n شیء گوییم و با نماد $\binom{n}{r}$ نشان می‌دهیم و برابر است با:

$$\binom{n}{r} = C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

مثال ۳۰.۶. به چندطریق می‌توان از بین ده عضو شورای شهر دو نفر را به عنوان رئیس و معاون انتخاب کرد؟

مثال ۳۱.۶. یک هفت ضلعی منتظم مفروض است. تمام قطرهایش رارسم کرده ایم. کلا چند قطر رسم شده است؟ اگر بدانیم هیچ سه قطری در یک نقطه متقاطع نیستند،تعداد محل‌های برخورد این قطرها را بیابید.

مثال ۳۲.۶. شانزده تیم فوتبال بصورت دوره‌ای باهم بازی می‌کنند. کلا چند بازی در این دوره انجام می‌شود؟

مثال ۳۳.۶. به ازای کدام مقدار n داریم : $\binom{n}{۲} = ۲۱$.

مثال ۳۴.۶. ثابت کنید: $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

مثال ۳۵.۶. به کمک مثال بالا ثابت کنید :

الف: تعداد زیرمجموعه های r عضوی با تعداد زیرمجموعه‌های $n-r$ عضوی برابر است.

ب: $\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+\cdots+\binom{n}{n}=۲^n$.

ج: اتحاد پاسکال $\binom{n}{r}=\binom{n-۱}{r}+\binom{n-۱}{r-۱}$.

مثال ۳۶.۶. از بین شش کتاب مفروض :

۱. به چند طریق می توان ۴ تا را در یک قفسه کنار هم چید؟

۲.به چند طریق می‌توان ۴ کتاب به یک کتابخانه هدیه داد؟

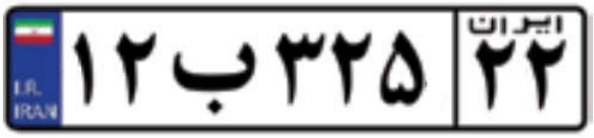
برای جمع بندی تمام مطالب فصل مثال های متنوع زیر را بررسی می‌کنیم.

مثال ۳۷.۶. پنج ماشین پژو و سه ماشین بنز به چند طریق در یک ردیف می‌توانند کنار هم پارک کنند که ماشین‌های بنز کنار هم و ماشین‌های پژو هم کنار هم باشند؟

مثال ۳۸.۶. چند عدد ۵ رقمی با ارقام متمایز بااستفاده از ارقام مجموعه $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$ می‌توان ساخت بطوری‌که دو عدد مضرب ۳ همواره کنار هم باشند؟

مثال ۳۹.۶. مجموعه ارقام $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$ مفروض است. چند عدد ۸ رقمی با ارقام متمایزبا استفاده از این ارقام می‌توان نوشت بطوری‌که هیچ دو عدد فرد اول این مجموعه کنار هم نباشند؟

مثال ۴۰.۶. یک پلاک ماشین بصورت شکل زیر است. ارقامی که درسمت راست پلاک استفاده می‌شود از مجموعه $\{۱۱,۲۲,\cdots,۹۹\}$ است. ارقام سمت چپ از مجموعه $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$ انتخاب می‌شود و حروف بین ارقام سمت چپ تنها ۱۳ حرف از حروف الفبای فارسی است. معین کنید به این ترتیب چند پلاک ماشین می توان ساخت؟



مثال ۴۱.۶. تعداد کلماتی یازده حرفی که با حروف کلمه‌ی $Mississippi$ می‌توان نوشت را بیابید.

مثال ۴۲.۶. چند کلمه ده حرفی با حروف c,b,a می توان ساخت بطوریکه دقیقا شامل سه حرف a باشد؟

جایگشت با تکرار

اگر مثال ۴۱ را با دقت بیشتری بررسی کنید و ترکیب‌های در راه حل را به فاکتوریل تبدیل کنید به نتیجه‌ی جالبی بین تعداد اشیاء تکراری و تعداد کل و جواب مسئله می‌رسید. اثبات این مطلب در حالت کلی هم چندان مشکل نیست. فرض کنید m_1 شیء از نوع a_1 و m_2 شیء از نوع a_2و ...و m_k شیء از نوع a_k داریم که $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$.در اینصورت هر چیدن این nشیء را یک جایگشت با تکرار می‌نامیم.تعداد این جایگشت‌ها برابر است با :

$$\frac{n!}{m_1!\, m_2! \cdots m_k!}$$

با این حساب در مثال ۴۱ می توان تعداد جواب ها را از دستور یافت که برابر است با : $\frac{11!}{1!\,4!\,4!\,2!}$.

مثال ۴۳.۶. چند عدد ده رقمی با استفاده از سه رقم ۴ و دو رقم ۲ و پنج رقم ۸ می‌توان نوشت؟

تمرین ۱۵.۶. ده نقطه روی محیط یک دایره داده شده است.کلیه‌ی وترهای بین دوبدوی این نقاط را رسم می کنیم.

الف: چند وتر رسم شده است؟

ب: تعداد مثلث‌هایی را بیابید که رئوس آنها روی محیط دایره و اضلاع آنها روی وترهای رسم شده باشد.

تمرین ۱۶.۶. به چند طریق می‌توان ۷ کتاب یکسان را بین ده نفر توزیع کرد بطوریکه به هر نفر حداکثر یک کتاب برسد؟

تمرین ۱۷.۶. در چند زیر مجموعه ۵ عضوی از مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, ..., 10\}$ حداقل سه عدد فرد وجود دارد؟

تمرین ۱۸.۶. مجموعه $A = \{1, 2, 3, \cdots, 19, 20\}$ مفروض است.

۱. مجموعه A چند زیرمجموعه ۸ عضوی دارد؟

۲. در چند زیرمجموعه ۸ عضوی اعداد ۱،۲ و۳ وجود دارند؟

۳. در چند زیرمجموعه ۸ عضوی هیچ یک از اعداد ۱،۲و۳ وجود ندارند؟

۴. در چند زیرمجموعه ۸ عضوی حداقل یکی از اعضای $\{1, 2, 3\}$ وجود دارند؟

۵. در چند زیرمجموعه ۸ عضوی ،عددی بزرگتر از ۱۵ وجود دارد؟

۶. در چند زیرمجموعه ۸ عضوی کوچکترین عضو ۵ و بزرگترین ۱۵ است؟

۷. در چند زیرمجموعه ۸ عضوی اختلاف بزرگترین عضو از کوچکترین عضو برابر ۱۰ است؟

۸. در چند زیرمجموعه ۸ عضوی حداقل ۶ عدد فرد وجود دارد؟

۹. در چند زیرمجموعه ۸ عضوی حداقل ۳ عدد فرد و حداقل ۳ عدد زوج وجود دارد؟

تمرین ۱۹.۶. در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی $Gallery$ حروف l غیرمجاورند؟

تمرین ۲۰.۶. در یک جمع ۹ زوج (زن و شوهر) حضور دارند. به چند طریق می‌توان ۱۰ نفر از این جمع انتخاب کرد طوری که در بین آنها دقیقا ۳ زوج حضور داشته باشند؟

تمرین ۲۱.۶. در یک کلاس ۳۰ دانش‌آموز وجود دارد. می‌خواهیم ۶ نفر از این دانش‌آموزان را برای تیم والیبال و ۸ نفر را برای تیم فوتبال انتخاب کنیم بطوری که تمام اعضای تیم والیبال از اعضای تیم فوتبال بلندتر باشد. به چند طریق این کار شدنی است؟

تمرین ۲۲.۶. در یک صفحه شطرنجی ۶ × ۴ چند مستطیل دیده می‌شود؟

تمرین ۲۳.۶. در چند عدد ۸ رقمی با ارقام $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ دقیقا ۵ رقم فرد وجود دارد؟

تمرین ۲۴.۶. در چند جایگشت ۶ حرفی از حروف کلمه‌ی $logarithm$ دقیقا دو حرف صدادار وجود دارد؟

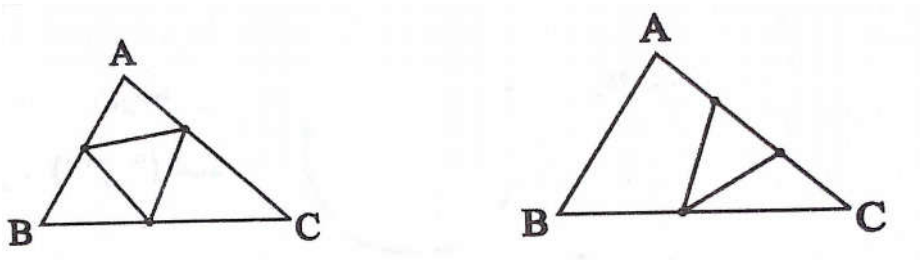
تمرین ۲۵.۶. در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی $computers$ حروف صدادار به ترتیب الفبایی وجود دارند و همچنین حرف p جلوتر از حرف c قرار دارد؟

تمرین ۲۶.۶. در چند کلمه‌ی ده حرفی با حروف c, b, a سومین حرف a در مکان هفتم کلمه آمده است؟

تمرین ۲۷.۶. ده نفر را به چند طریق می‌توان به دو تیم ۵ نفره B, A تقسیم کرد؟

تمرین ۲۸.۶. ده نفر را به چند طریق می توان به دو تیم ۵ نفره تقسیم کرد؟

تمرین ۲۹.۶. روی هر ضلع مثلث ABC پنج نقطه را علامت گذاشته‌ایم. چند مثلث وجود دارد که رئوس هریک متعلق به این ۱۵ نقطه باشد؟



۴.۶ تست‌های فصل ششم

۱- سه نوع کتاب علمی و ۴ نوع کتاب ادبی را به چند طریق می‌توان در یک ردیف کنار هم قرار داد به طوری که ابتدا کتابهای علمی یک در میان قرار گیرند؟

۱) ۱۴۴ ۲) ۱۲۰ ۳) ۹۶ ۴) ۷۲

۲- با حروف کلمه بلوچستان چند کلمه ۲ حرفی بدون توجه به معنا می‌توان ساخت به طوری که حرفی در هر یک از آنها تکرار نشده باشد؟

۱) $\frac{۸!}{۵!۳!}$ ۲) $\frac{۸!}{۵!}$ ۳) $\frac{۸!}{۳!}$ ۴) $۸!$

۳- با چهار رقم ۰,۱,۲,۳ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۱۵ ۴) ۱۰

۴- مجموعه $\{a,b,c,d,e\}$ چند زیر مجموعه ۲ عضوی دارد؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۰ ۳) ۱۵ ۴) ۱۰

۵- برای مسافرت از شهری به شهر دیگر ۵ نوع وسیله نقلیه موجود است. تعداد صورت‌هایی که می‌توان از شهر A به شهر B با عبور از دو شهر متوالی C , D رفت به طوری که از هر نوع وسیله نقلیه حداکثر یک بار استفاده شده باشد، کدام است؟

۱) ۶۰ ۲) ۸۰ ۳) ۹۰ ۴) ۱۲۵

۶- با ارقام ۳ ، ۲ ، ۱ و ۰ چند عدد سه رقمی که تکرار ارقام مجاز باشد می‌توان نوشت؟

۱) ۹ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

۷- از بین ۶ دانش‌آموز کلاس چهارم و ۵ دانش‌آموز کلاس سوم می‌خواهیم انجمنی را با ۴ دانش‌آموز کلاس چهارم و ۲ دانش‌آموز کلاس سوم تشکیل دهیم این عمل به چند طریق ممکن است؟

۱) ۲۵ ۲) ۱۵۰ ۳) ۳۳۰ ۴) ۴۲۰

۸- دانش‌آموزی باید به ۱۸ سوال از ۲۰ سوال امتحان به دلخواه پاسخ دهد. به چند طریق می‌تواند این ۱۸ سوال را انتخاب کند؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۱۹۰ ۴) ۳۸۰

۹- با چهار عدد ۰ , ۹ , ۶ , ۵ چند عدد چهار رقمی (بدون تکرار) می‌توان ساخت؟

۱) ۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۳۲

۱۰- با ارقام ۵ , ۴ , ۰ , ۱ چند عدد چهار رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

۱۱- شخصی از میان ۱۰ کتاب خود می‌خواهد دو کتاب را انتخاب نموده و به یکی از دوستانش هدیه کند چند صورت ممکن است؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۵ ۳) ۹۰ ۴) ۲۰

۱۲- با ارقام ۰ , ۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ چند عدد سه رقمی بزرگتر از ۳۰۰ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۴۰ ۲) ۶۰ ۳) ۸۰ ۴) ۱۲۰

۱۳- سه کتاب ریاضی و دو کتاب اقتصاد که با هم متفاوتند را به چند طریق می‌توان در یک قفسه کنار هم قرار داد به طوری که کتابهای هم موضوع همواره کنارهم باشند؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۶ ۳) ۱۲۰ ۴) ۶۰

۱۴- مجموعه اعداد چهار رقمی که با ارقام ۰ , ۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ بدون تکرار رقم می‌توان نوشت ، چند عضو دارد؟

۱) ۲۴۰ ۲) ۲۶۰ ۳) ۲۸۰ ۴) ۳۰۰

۱۵- یک مجموعه ۸ عضوی چند زیر مجموعه ۴ عضوی دارد؟

۱) ۸۴ ۲) ۷۰ ۳) ۵۶ ۴) ۴۲

۱۶- به چند طریق می‌توان ۳ کتاب از ۵ کتاب سال اول و ۴ کتاب از ۶ کتاب سال دوم را یک در میان در قفسه‌ای چید؟

۱) $\binom{11}{7}4!\times 3!$ ۲) $\binom{11}{7}4!\times 3!\times 2$ ۳) $\binom{6}{4}\binom{5}{3}4!\times 3!$ ۴) $\binom{6}{4}\binom{5}{3}4!\times 3!\times 2$

۱۷- یک قفل رمزی دارای یک رمز سه رقمی فرد با ارقام ۱ و ۲ و ... ۹ می‌باشد اگر رمز این قفل را ندانیم و امتحان کردن هر رمز ۲ دقیقه طول بکشد حداکثر چند ساعت طول می‌کشد تا قفل باز شود؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۲/۵ ۳) ۱۳ ۴) ۱۳/۵

۱۸- با حروف کلمه جمهوری به چند طریق می‌توان کلمات ۳ حرفی بدون تکرار حروف ساخت بطوریکه حرف اول آنها نقطه‌دار نباشد؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۶۰ ۴) ۸۰

۱۹- مقدار $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ کدام است؟

۱) $n(n+1)$ ۲) $n(n-1)$ ۳) $\frac{n+1}{n-1}$ ۴) $\frac{n(n+1)}{2}$

۲۰- حروف کلمهٔ ASSIST را به چند طریق بدون توجه به مفهوم آن می‌توان کنار هم قرار داد به طوری که S ها یک در میان باشند؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۲۱- بر روی یک دایره ۸ نقطه متمایز وجود دارد، تعداد چهار ضلعیهای محدب که هر رأس یک چهار ضلعی واقع بر نقاط مفروض باشد، کدام است؟

۱) ۵۶ ۲) ۶۸ ۳) ۷۰ ۴) ۷۲

۲۲- از بین ۱۲ عضو انجمن خانه و مدرسه، به چند طریق می‌توان سه نفر طوری انتخاب کرد، که همواره یک فرد مورد نظر، بین آن سه نفر باشد؟

۱) ۴۵ ۲) ۵۵ ۳) ۶۶ ۴) ۷۲

۲۳- از ۱۰ کتاب ادبی متفاوت و ۸ کتاب علوم متفاوت، چند دسته‌ی ۵ تایی متشکل از ۲ کتاب ادبی و ۳ کتاب علوم می‌توان انتخاب کرد؟

۱) ۴۵۰ ۲) ۵۴۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۴۲۰

۲۴- پلاک اتومبیل سواری سری ب در تهران به صورت $\frac{\text{تهران}}{\text{** ب ***}}$ است که هر ستاره نمایش یک رقم غیر صفر است.

در سری ب و در تهران چند پلاک می‌توان ساخت که با رقم فرد شروع و به رقم زوج ختم شود؟

۱) ۱۱۶۶۴ ۲) ۱۴۵۸۰ ۳) ۱۵۴۸۰ ۴) ۱۸۲۲۵

۲۵- یک مجموعه‌ی n عضوی، ۵۵ زیر مجموعه‌ی n - ۲ عضوی دارد، n کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۲۶- ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ را به طریقی کنار هم قرار داده‌ایم که همواره رقم‌های فرد کنار هم باشند تعداد پنج رقمی‌های حاصل کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

۲۷- ۴ دانش‌آموز کلاس اول و ۵ دانش‌آموز دوم به چند طریق می‌توانند کنار هم در یک ردیف قرار بگیرند، هرگاه دانش‌آموزان کلاس اول یک در میان باشند؟

۱) $۴! \times ۵!$ ۲) $۴! \times ۵! \times ۲$ ۳) $۴! \times ۵! \times ۳$ ۴) $۴! \times ۵! \times ۳!$

۲۸- ۵ نقطه متمایز بر روی محیط یک دایره قرار دارند. تعداد چندضلعی‌هایی که رئوس آنها بر این نقاط قرار دارند، کدام است؟

۱) ۲۶ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۲۰

۲۹- با ارقام ۵ و ۳ و ۲ و ۰ چند عدد چهار رقمی مضرب ۵ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۳۰- اگر $P(n , ۲) - C(n , ۲) = ۳۶$ باشد، حاصل $C(n , ۳)$ چیست؟

۱) ۷۲ ۲) ۸۴ ۳) ۹۶ ۴) ۱۰۸

۳۱- به چند طریق از میان ۵ آقا و ۴ خانم می‌توان شورایی متشکل از ۲ آقا و ۳ خانم انتخاب نمود؟

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰

۳۲- ۴ کتاب ریاضی مختلف و ۳ کتاب فیزیک مختلف داریم، به چند طریق می‌توانیم آنها را در یک ردیف قرار دهیم به نحوی که کتابهای ریاضی در کنار هم باشند؟

۱) $۲ \times ۳! \times ۴!$ ۲) $(۴!)^۲$ ۳) $۳! \times ۴!$ ۴) $۲ \times ۴! \times ۴!$

۳۳- با حروف کلمه SHOP و بدون تکرار حروف، چند کلمه ۳ حرفی می‌توان نوشت که حتماً شامل حرف S باشد؟

۱) ۶ ۲) ۱۸ ۳) ۱۲ ۴) ۹

۳۴- می‌خواهیم از یک کلاس ۱۰ نفری شامل A و B چهار نفر برای شرکت در یک مسابقه ورزشی انتخاب کنیم به طوریکه شخص A حتماً انتخاب نشود ولی شخص B حتماً انتخاب شده باشد. این عمل به چند شریق امکان‌پذیر است؟

۱) ۱۸۶ ۲) ۲۸ ۳) ۵۶ ۴) ۸۴

۳۵- اگر $\binom{n+۱}{K+۱} = A$, $\binom{n}{K} = B$ حاصل $\binom{n}{K+۱}$ برابر است با :

۱) $A + B$ ۲) $A - B$ ۳) $nA - B$ ۴) $A + nB$

۳۶- اگر یک مجموعه n عضوی دارای ۱۰ زیر مجموعه ۲ عضوی باشد، دارای چند زیر مجموعه ۳ عضوی است؟

۱) ۱۰ ۲) ۵ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

۳۷- تعداد اعداد ۳ رقمی فرد فاقد رقم ۵ کدام است؟

۱) ۲۸۸ ۲) ۲۵۶ ۳) ۱۹۲ ۴) ۱۴۴

۳۸- در یک شرکت ۶ نفری به چند طریق می‌توان از بین کارکنان شرکت یک رئیس، یک حسابدار و یک منشی انتخاب کرد هرگاه هر فرد فقط یک شغل بتواند اختیار کند؟

۱) ۲۱۶ ۲) ۲۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۷۲

۳۹- با ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ چند عدد ۵ رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت هر گاه بر ۵ بخش‌پذیر بوده و از نیز ۳۰۰۰۰ بزرگتر باشد؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

۴۰- حروف کلمه‌ی LAGRANGE را با جایگشت‌های مختلف کنار هم قرار می‌دهیم در چند حالت حروف یکسان کنار هم قرار می‌گیرند؟

۱) ۳۶۰ ۲) ۵۴۰ ۳) ۷۲۰ ۴) ۱۴۴۰

۴۱- با فرض آنکه $P(n,۲) = \binom{n}{۳}۲$ عدد طبیعی n کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۵

۴۲- تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی یک مجموعه با تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی آن برابر است. تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی عضوی آن چندتاست؟

۱) ۲۱ ۲) ۴۲ ۳) ۲۴ ۴) ۱۸

۴۳- اگر $A = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶\}$، A چند زیرمجموعه‌های ۳ عضوی دارد که شامل ۱ باشد اما ۲ را نداشته باشد؟

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۹

۴۴- با ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ و ۰ چه تعداد عدد ۳ رقمی مضرب ۵ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۶۰ ۲) ۳۶ ۳) ۴۸ ۴) ۳۲

۴۵- از بین ۵ مهره‌ی قرمز و ۴ مهره‌ی سفید می‌خواهیم ۳ مهره را انتخاب کنیم. در چند حالت ۲ مهره از یک رنگ و مهره‌ی دیگر به رنگی متفاوت می‌باشد؟

۱) ۶۰ ۲) ۷۰ ۳) ۴۰ ۴) ۵۰

۴۶- چند عدد ۵ رقمی با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۵ وجود دارد که در آن‌ها رقم ۳ حداقل یک‌بار ظاهر شود؟

۱) ۱۷۳۲ ۲) ۸۶۶ ۳) ۲۱۰۱ ۴) ۱۸۰۲

۴۷- از میان هفت پرستار مرد و پنج پرستار زن به چند طریق می‌توان ۲ پرستار مرد و ۳ پرستار زن انتخاب نمود؟

۱) ۱۴۴ ۲) ۱۶۹ ۳) ۱۸۲ ۴) ۲۱۰

۴۸- در مجموعه‌ای با افزایش ۳ عضو تعداد زیرمجموعه‌ها ۱۱۲ واحد اضافه می‌شود. در این صورت تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی چند واحد افزایش می‌یابد؟

۱) ۲۷ ۲) ۴۲ ۳) ۳۵ ۴) ۳۱

۴۹- با ارقام ۲ , ۱ , ۰ چند عدد ۶ رقمی زوج می‌توان نوشت؟

۱) ۷۲۹ ۲) ۱۶۲ ۳) ۴۸۶ ۴) ۳۲۴

۵۰- حاصل $\binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \binom{n+۱}{۲} + \binom{n+۲}{۳}$ کدام است؟

۱) $\frac{n(n+۱)(n+۲)}{۶}$ ۲) $\frac{(n+۳)(n+۲)(n+۱)}{۶}$

۳) $\frac{(n+۳)(n+۲)(n+۱)}{۳}$ ۴) $\frac{n(n+۱)(n+۲)}{۳}$

۵۱- اگر بخواهیم ۴ دانش آموز کلاس اول و ۳ دانش آموز کلاس دوم را در یک ردیف کنار هم بنشانیم، در چند حالت دانش‌آموزان کلاس دوم کنار هم هستند؟

۱) $۳!۵!$ ۲) $۳!۴!$ ۳) $۴!۴!$ ۴) $۴!۵!$

۵۲- با حروف کلمه‌ی «ایرانیان» چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان نوشت؟

۱) ۱۶۸۰ ۲) ۳۳۶۰ ۳) ۴۰۳۲۰ ۴) ۶۷۲۰

۵۳- ۱۰ نقطه‌ی متمایز بر روی محیط یک دایره قرار گرفته‌اند. تعداد چهار ضلعی‌هایی که رئوس آن‌ها بر این ده نقطه قرار دارد، چه تعداد از مثلث‌هایی که رئوس آن‌ها بر این ۱۰ نقطه قرار دارد بیشتر است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۱۰ ۴) ۹۰

۵۴- مجموع جواب‌های معادله‌ی $\binom{۲x}{x+۱} = \binom{۲x}{۳}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۵۵- به چند طریق می‌توان از بین ۵ نفر دانش‌آموز کلاس اول و ۴ نفر دانش‌آموز کلاس دوم، ۴ نفر که حداقل ۳ نفر در آن‌ها کلاس دومی باشند انتخاب کرد و به آن‌ها ۴ جایزه مختلف اهداء نمود؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۴۸۰ ۴) ۵۰۴

۵۶- با ده، نقطه ی A , B,.....,J که روی یک دایره قرار دارند، چند مثلث می‌توان ساخت که شامل راس G باشند؟

۱) ۴۵ ۲) ۳۶ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۱۲

۵۷- اگر داشته باشیم $n! = ۲^{۷} \times ۳^{۲} \times ۳۵$، مقدار $\binom{n}{۲}$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۳۶ ۳) ۲۱ ۴) ۲۸

۵۸- پنج نفر قراراست در یک سمینار سخنرانی کنند. اگر ترتیب آنها مهم باشد، به چند طریق ممکن است که شخص A پیش از شخص B سخنرانی کند؟

۱) ۶۰ ۲) ۸۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۲۰

۵۹- با ارقام ۱,۲,۳,۴,۵ چند عدد ۵ رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت که ۲ رقم زوج کنار هم باشند؟

۱) ۲۴ ۲) ۴۸ ۳) ۷۲ ۴) ۹۶

۶۰- حاصل $\binom{۱۷}{۵} + \binom{۱۷}{۴}$ کدام است؟

۱) $\binom{۱۸}{۴}$ ۲) $\binom{۱۸}{۵}$ ۳) $\binom{۱۷}{۶}$ ۴) $\binom{۱۷}{۹}$

۶۱- با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و بدون تکرار ارقام چند عدد چهار رقمی زوج می‌توان نوشت که شامل رقم ۴ باشد و یکان آن ۶ نباشد؟

۱) ۳۱۲ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۱۲ ۴) ۲۸۰

۶۲- در یک همایش ۵ نفر جهت سخنرانی ثبت‌نام کرده‌اند. چند طریق ترتیب سخنرانی برای آنان وجود دارد، به طوری که بین سخنرانی دو فرد موردنظر a و b از آنان فقط یک نفر سخنرانی کند؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۰

۶۳- با ارقام ۱,۳,۵,۷,۹ چند عدد سه رقمی با شرط «رقم صدگان > رقم دهگان > رقم یکان» می‌توان نوشت؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۶۴- از بین ۵ دانش‌آموز تجربی و ۳ دانش‌آموز ریاضی، به چند طریق می‌توان ۳ نفر برای کار در آزمایشگاه انتخاب کرد به طوری که لااقل دو نفر آنان دانش‌آموز تجربی باشند؟

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰

۶۵- از هریک از مدارس A و B و C و D و E چهار نفر به اردوگاه دانش‌آموزی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان سه دانش‌آموز که دو به دو غیر هم مدرسه باشند، انتخاب کرد؟

۱) ۱۶۰ ۲) ۳۲۰ ۳) ۴۸۰ ۴) ۶۴۰

۶۶- از هریک از ۶ منطقه‌ی کشوری، ۱۵ دانش‌آموز به یک اردوگاه فرهنگی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان ۳ دانش‌آموز از بین آن‌ها که دو به دو غیر هم منطقه‌ای هستند انتخاب کرد؟

۱) ۵۷۶۰۰ ۲) ۶۷۵۰۰ ۳) ۷۵۶۰۰ ۴) ۷۶۵۰۰

۶۷- تعداد جایگشت‌های حروف کلمه SYSTEM به طوری که Sها کنار هم نباشند، کدام است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۶۰

۶۸- از هر یک از ۸ مدرسه علاقه‌مند، ۶ نفر برای بازی تنیس ۴ نفری انتخاب شده‌اند. به چند طریق این بازی ممکن است انجام شود. به طوری که هر دو نفر همیار هم، از یک مدرسه باشند؟

۱) ۴۲۰۰ ۲) ۵۴۰۰ ۳) ۵۶۰۰ ۴) ۶۳۰۰

۶۹- با حروف کلمه‌ی جمهوری چند کلمه‌ی سه حرفی با حروف متمایز می‌توان ساخت که با حرف نقطه‌دار شروع شود؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

۷۰- چند عدد سه رقمی با ارقام متمایز و فرد که بزرگ‌تر از ۵۰۰ باشد، وجود دارد؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۴۸ ۴) ۹۶

۷۱- دو سرباز و دو افسر به چند طریق می‌توانند کنار هم بایستند به طوری که دو افسر کنار هم نباشند؟

۱) ۶ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

۷۲- از بین ۵ جفت کفش به چند طریق می‌توان ۳ لنگه انتخاب کرد که یک جفت در میان آن‌ها باشد؟
۱) ۴۰ ۲) ۵۶ ۳) ۹۶ ۴) ۱۲۸

۷۳- چند عدد ۳ رقمی بیش‌تر از ۵۰۰ با ارقام ۲، ۴، ۶ و ۸ وجود دارد؟ (تکرار با ارقام مجاز است.)
۱) ۳۲ ۲) ۶۰ ۳) ۳۰۰ ۴) ۲۵۰

۷۴- حروف کلمه‌ی PANAMA را به چند طریق می‌توان کنار هم قرار داد که هر ۳ حرف A مجاور باشند؟
۱) !۳ ۲) !۳ !۳ ۳) !۴ ۴) !۳ !۴

۷۵- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ چند عدد ۷ رقمی می‌توان نوشت به طوری که ارقام فرد یکی در میان باشند؟
۱) !۷ ۲) !۴ !۳ ۳) !۴ ۴) !۳ !۴

۷۶- از هر یک از تیم‌های ملی فوتبال، والیبال، بسکتبال و هندبال، ۵ نفر به جلسه‌ای دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان ۳ نفر که دو به دو هم تیمی نباشند، انتخاب کرد؟
۱) ۳۰۰ ۲) ۴۰۰ ۳) ۵۰۰ ۴) ۶۰۰

۷۷- چند عدد چهار رقمی با ارقام غیر صفر وجود دارد که از ۴۰۰۰ کم‌تر و فرد باشند؟
۱) ۱۲۰۰ ۲) ۱۲۱۵ ۳) ۱۶۲۰ ۴) ۱۵۰۰

۷۸- چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز و فرد، بزرگتر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟
۱) ۷۲ ۲) ۸۴ ۳) ۹۶ ۴) ۱۰۸

۷۹- با ارقام ۹ ,... ,۳ ,۲ ,۱ به چند طریق می‌توان یک عدد پنج رقمی ساخت، به‌طوری‌که درست ۲ رقم آن زوج باشد؟
۱) ۶۴۰۰ ۲) ۷۲۰۰ ۳) ۸۴۰۰ ۴) ۹۶۰۰

۸۰- با ارقام متمایز ۹,... ,۴,۳,۲ ,۱ به چند طریق می‌توان یک عدد چهار رقمی ساخت. به‌طوری‌که فقط یکی از ارقام آن زوج باشد؟
۱) ۶۴۰ ۲) ۷۲۰ ۳) ۷۸۰ ۴) ۹۶۰

۵.۶ کلید تست‌های فصل ششم

	۱	۲	۳	۴
۱ -	■	□	□	□
۲ -	■	□	□	□
۳ -	■	□	□	□
۴ -	□	□	□	■
۵ -	■	□	□	□
۶ -	□	□	□	■
۷ -	□	■	□	□
۸ -	□	□	■	□
۹ -	□	■	□	□
۱۰ -	□	□	■	□
۱۱ -	□	■	□	□
۱۲ -	□	■	□	□
۱۳ -	■	□	□	□
۱۴ -	□	□	□	■
۱۵ -	□	■	□	□
۱۶ -	□	□	■	□
۱۷ -	□	□	□	■
۱۸ -	□	□	□	■
۱۹ -	■	□	□	□
۲۰ -	□	□	□	■
۲۱ -	□	□	■	□
۲۲ -	□	■	□	□
۲۳ -	■	□	□	□
۲۴ -	□	■	□	□
۲۵ -	□	□	□	■
۲۶ -	□	□	■	□
۲۷ -	□	□	■	□
۲۸ -	□	□	■	□
۲۹ -	□	□	■	□
۳۰ -	□	■	□	□
۳۱ -	□	□	□	■
۳۲ -	□	■	□	□
۳۳ -	□	■	□	□
۳۴ -	□	□	■	□
۳۵ -	□	■	□	□
۳۶ -	■	□	□	□

	۱	۲	۳	۴
۳۷ -	■	□	□	□
۳۸ -	□	□	■	□
۳۹ -	□	■	□	□
۴۰ -	□	□	■	□
۴۱ -	□	□	□	■
۴۲ -	■	□	□	□
۴۳ -	□	■	□	□
۴۴ -	□	■	□	□
۴۵ -	□	■	□	□
۴۶ -	■	□	□	□
۴۷ -	□	□	□	■
۴۸ -	□	□	□	■
۴۹ -	□	□	□	■
۵۰ -	□	■	□	□
۵۱ -	■	□	□	□
۵۲ -	■	□	□	□
۵۳ -	□	□	□	■
۵۴ -	□	□	■	□
۵۵ -	□	□	□	■
۵۶ -	□	■	□	□
۵۷ -	□	□	□	■
۵۸ -	■	□	□	□
۵۹ -	□	■	□	□
۶۰ -	□	■	□	□
۶۱ -	□	□	■	□
۶۲ -	□	□	■	□
۶۳ -	□	□	■	□
۶۴ -	□	□	□	■
۶۵ -	□	□	□	■
۶۶ -	□	■	□	□
۶۷ -	□	□	■	□
۶۸ -	□	□	□	■
۶۹ -	□	□	□	■
۷۰ -	□	□	■	□
۷۱ -	□	■	□	□
۷۲ -	■	□	□	□

	۱	۲	۳	۴
۷۳ -	■	□	□	□
۷۴ -	□	□	■	□
۷۵ -	□	■	□	□
۷۶ -	□	□	■	□
۷۷ -	□	■	□	□
۷۸ -	□	□	■	□
۷۹ -	□	■	□	□
۸۰ -	□	□	□	■