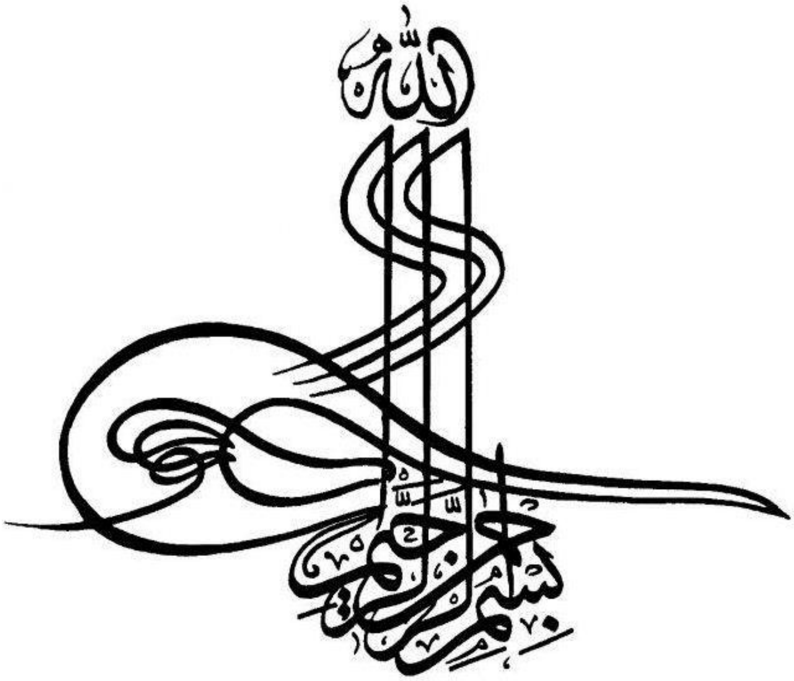


مثلثات

(فصل دوم ریاضی پایه دهم رشته های تجربی و ریاضی فیزیک)

- طبقه بندی سوالات به صورت موضوعی
- پاسخ کاملا تشریحی
- تمرین‌های برای آمادگی

مؤلف:
حبیب هاشمی

۱۳۹۶

مقدمه

جزوه حاضر که براساس مطالب کتاب درسی، مبحث «مثلثات» نگارش شده است، دارای ویژگی های زیر است:

۱- باز کردن مفاهیمی که در کتاب درسی به علت محدودیت حجم، به آن کمتر پرداخته شده است.

۲- مطالب به صورت ساده و روان و به زبان دانش آموز ارائه شده است.

۳- مطالب و نکات، به گونه ایی است که خلأ بین مطالب ارائه شده در کتب درسی و سؤالات مطرح شده در کنکورهای سراسری را پر کند.

۴- در این کتاب با نگاهی عمیق‌تر و جامع تر از کتاب درسی، به مطالب پرداخته شده و به همین منظور از مثال‌ها و مسائل حل شده متنوعی بهره گرفته ایم.

۵- ایجاد تعادل نسبی بین مهارت های محاسبات صوری و درک مفهومی.

۶- استفاده از مسائل باز پاسخ.

۷-توجه به دانش قبلی دانش آموزان.

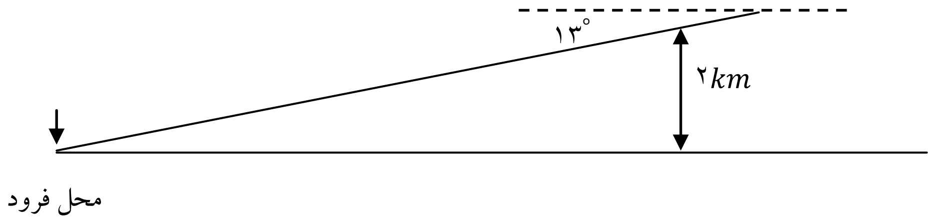
۸- ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب.

در پایان امیدواریم که مطالعه ی دقیق این کتاب و بهره گیری از رهنمودهای دبیران فرهیخته و گران قدر بتواند موفقیت تحصیلی شما خوبان را تضمین و تثبیت نماید. ارائه ی نظرات شما دانش پژوهان، دبیران فرهیخته و گران قدر، موجب سپاس و امتنان است.

حبیب هاشمی

درس اول: نسبت های مثلثاتی

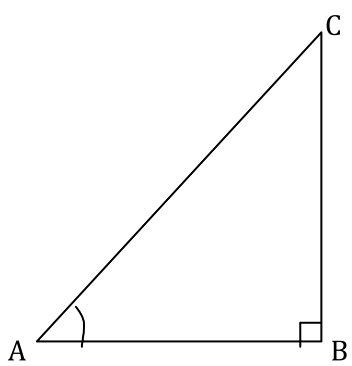
مثلثات شاخه ای از ریاضیات است که به بررسی روابط بین زوایا و اضلاع یک مثلث می پردازد. یکی از اهداف این علم، اندازه گیری فاصله ها به صورت غیر مستقیم است. مثلثات در علوم مهندسی، فیزیک، نقشه برداری، نجوم و غیره کاربرد دارد.



به عنوان مثال، فرض کنید یک هواپیما در ارتفاع ۲ کیلومتری از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویهٔ هواپیما با افق ۱۳° باشد، می خواهیم محل دقیق فرود هواپیما را بدانیم. این مسئله و مسائلی نظیر این با استفاده از روابط مثلثاتی حل می شوند.

در مثلث قائم الزاویهٔ ABC برای زاویهٔ معین و حاده A، نسبت طول ضلع مقابل زاویهٔ A، به طول ضلع مجاور آن همواره مقداری ثابت است. این نسبت را تانژانت زاویهٔ A می نامیم و آن را با tanA نشان می دهیم. به عبارت دیگر، در مثلث قائم الزاویهٔ ABC، داریم.

$$\boxed{\tan A = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A}{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A} = \frac{BC}{AB}}$$



عکس تانژانت زاویه A را کتانژانت می نامیم و آن را با cotA نشان می دهیم. به عبارت دیگر، در مثلث قائم الزویه ABC داریم:

$$cotA=\frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A}{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A}=\frac{AB}{BC}$$

در هر مثلث قائم الزاویه ABC، نسبت طول ضلع مقابل زاویهٔ حادهٔ A به طول وتر، همواره مقداری ثابت است که آن را سینوس زاویهٔ A می نامیم و با sinA نشان می دهیم. به عبارت دیگر

$$\sin A=\frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A}{\text{طول وتر}}=\frac{BC}{AC}$$

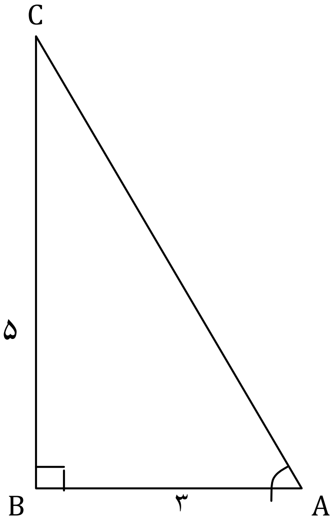
همچنین نسبت طول ضلع مجاور زاویهٔ حادهٔ A به طول وتر نیز مقداری ثابت است که آن را کسینوس زاویهٔ A می نامیم و آن را با cos A نشان می دهیم. به عبارت دیگر

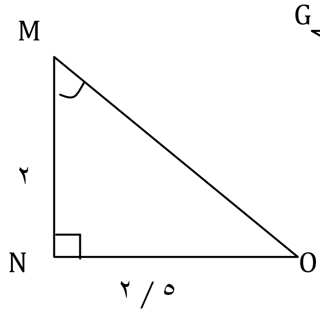
$$\cos A=\frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A}{\text{طول وتر}}=\frac{AB}{AC}$$

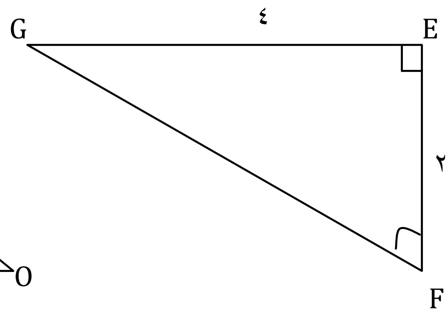
در یک مثلث قائم الزاویهٔ، نسبت های سینوس ، کسینوس ، تانژانت و کتانژانت را **نسبت های مثلثاتی** می نامیم.

نکته: به سادگی میتوان دید در مثلث قائم الزاویهٔ ABC، $\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}}=\frac{BC}{AB}=\tan A$ و از این رو $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$. به طور مشابه، می توان دید $\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}$

مثال: در هر یک از شکل های زیر، جاهای خالی را کامل کنید.







$\tan A = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{۵}{۳}$ $\qquad$ $\cot M = \dfrac{MN}{NO} = \dfrac{۲}{۲ / ۵}$ $\qquad$ $\tan G = \dfrac{EF}{GE} = \dfrac{۲}{۴}$

$\cot A = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{۳}{۵}$ $\qquad$ $\tan M = \dfrac{NO}{MN} = \dfrac{۲ / ۵}{۲}$ $\qquad$ $\cot G = \dfrac{GE}{EF} = \dfrac{٤}{۲}$

مثال: در شکل مقابل نسبتهای مثلثاتی زوایای αوβ را بدست آورید.

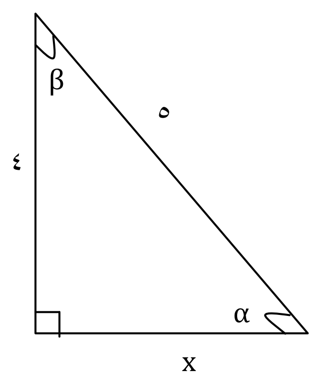
رابطه فیثاغورس $۵^۲ = ۴^۲ + x^۲ \to ۲۵ = ۱۶ + x^۲ \to x^۲ = ۹ \to x = ۳$

$sin\alpha = \frac{۴}{۵}$ $\qquad$ $sin\beta = \frac{۳}{۵}$

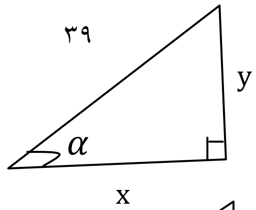
$cos\alpha = \frac{۳}{۵}$ $\qquad$ $cos\beta = \frac{۴}{۵}$

$\tan\alpha = \dfrac{۴}{۳}$ $\qquad$ $\tan\beta = \dfrac{۳}{۴}$

$\cot\alpha = \frac{۳}{۴}$ $\qquad$ $\cot = \frac{۴}{۳}$

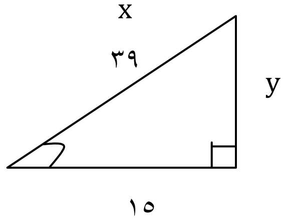


مثال: طول وتر یک مثلث قائم الزاویه ۳۹ و کسینوس یکی از زاویه های حاده ی آن $\frac{۵}{۱۳}$ باشد محیط مثلث را بدست آورید.



$$cos\alpha = \frac{۵}{۱۳}$$

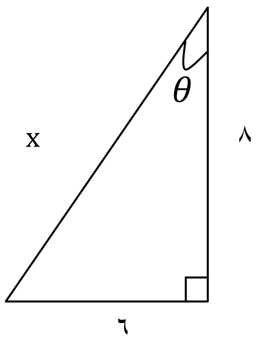
$$cos\alpha = \frac{x}{۳۹} \rightarrow \frac{۵}{۱۳} = \frac{x}{۳۹} \rightarrow x = ۱۵$$



$$sin\alpha = \frac{y}{۳۹} \rightarrow (۳۹)^۲ = ۱۵^۲ + y^۲ \rightarrow$$

مثال: در هر مثلث نسبتهای مثلثاتی زاویه ی θ را بدست آورید.

الف) رابطه ی فیثاغورس $x^۲ = ۶^۲ + ۸^۲ \rightarrow x^۲ = ۳۶ + ۶۴ = ۱۰۰ \rightarrow x = ۱۰$



$$sin\theta = \frac{۶}{۱۰}$$

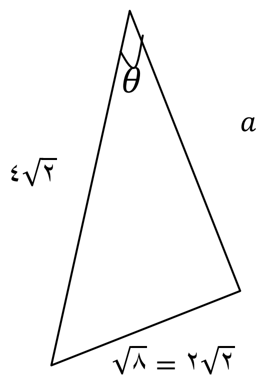
$$cos\theta = \frac{۸}{۱۰}$$

$$tan\theta = \frac{۶}{۸}$$

$$cot\theta = \frac{۸}{۶}$$

ب) رابطه ی فیثاغورس $(۴\sqrt{۲})^۲ = (\sqrt{۸})^۲ + a^۲$

$$۳۲ = ۸ + a^۲ \rightarrow a^۲ = ۲۴ \rightarrow a = \sqrt{۲۴} = ۲\sqrt{۶}$$



$$sin\theta = \frac{\sqrt{۸}}{۴\sqrt{۲}} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۴\sqrt{۲}} = \frac{۱}{۲}$$

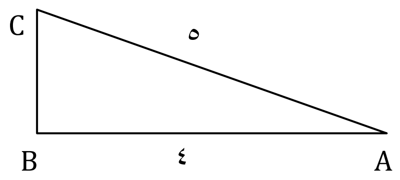
$$cos\theta = \frac{۲\sqrt{۶}}{۴\sqrt{۲}} = \frac{۱\sqrt{۳}}{۲}$$

$$tan\theta = \frac{۲\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۶}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$cot\theta = \frac{۲\sqrt{۶}}{۲\sqrt{۲}} = \sqrt{۳}$$

مثال: در مثلث قائم الزاویهٔ ABC $(\hat{B} = ۹۰^{\circ})$، $AB = ۴$ و $AC = ۵$ می باشند. مقدار $tanA$ و $cotA$ را بدست آورید.

پاسخ: با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، طول ضلع BC را بدست می آوریم:



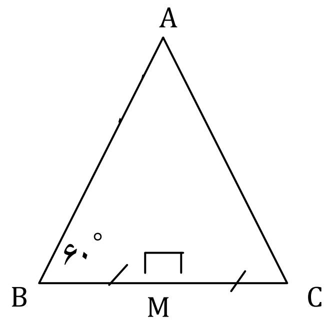
$$BC^۲ = AC^۲ - AB^۲ = ۲۵ - ۱۶ = ۹ \Longrightarrow BC = ۳$$

$$\Longrightarrow tanA = \frac{BC}{AB} = \frac{۳}{۴}, cotA = \frac{AB}{BC} = \frac{۴}{۳}$$

مثال: با در نظر گرفتن مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۲ ، نسبت های مثلثاتی ۳۰° و ۶۰° را به دست آورید.

حل) در مثلث متساوی الاضلاع ABC، نیمساز زاویهٔ A رارسم می کنیم .(AM).

AM بر BC عمود است و آن را نصف می کند. بنابراین داریم: $BM = \frac{BC}{۲} = \frac{۲}{۲} = ۱$



بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABM، داریم:

$$AM^۲ = AB^۲ - BM^۲ = (۲)^۲ - (۱)^۲ = ۴ - ۱ = ۳$$

$$\Longrightarrow AM = \sqrt{۳}$$

نسبت های مثلثاتی زاویهٔ ۳۰° در مثلث قائم الزاویهٔ ABM :

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{BM}{AB} = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{AM}{AB} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot ۳۰^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{\sqrt{۳}}{۱} = \sqrt{۳}$$

$$\frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

نسبت های مثلثاتی زاویهٔ ۶۰° در مثلث قائم الزاویهٔ ABM :

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{AM}{AB} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos ۶۰^\circ = \frac{BM}{AB} = \frac{۱}{۲}$$

$$\tan ۶۰^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{\sqrt{۳}}{۱} = \sqrt{۳}$$

$$\cot ۶۰^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

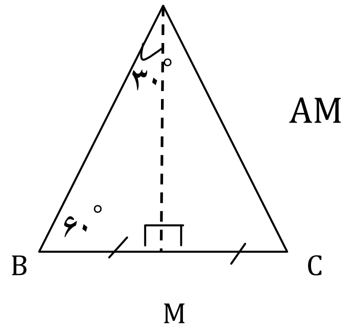
مثال: با در نظر گرفتن مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $۲\sqrt{۳}$ ، نسبت های مثلثاتی ۳۰° و ۶۰° را به دست آورید

حل) در مثلث متساوی الاضلاع ABC، نیمساز زاویهٔ A رارسم می کنیم .(AM).

AM بر BC عمود است و آن را نصف می کند. بنابراین داریم: $BM = \frac{BC}{۲} = \sqrt{۳}$

A

بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABM، داریم:



$$AM^{۲} = AB^{۲} - BM^{۲} = (۲\sqrt{۳})^{۲} - (\sqrt{۳})^{۲} = ۱۲ - ۳ = ۹$$

$$\Longrightarrow AM = ۳$$

نسبت های مثلثاتی زاویهٔ ۳۰° در مثلث قائم الزاویهٔ ABM:

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{BM}{AB} = \frac{\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳}} = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{AM}{AB} = \frac{۳}{۲\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}\ , \cot ۳۰^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{۳}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \sqrt{۳}$$

نسبت های مثلثاتی زاویهٔ ۶۰° در مثلث قائم الزاویهٔ ABM:

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{AM}{AB} = \frac{۳}{۲\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos ۶۰^\circ = \frac{BM}{AB} = \frac{\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳}} = \frac{۱}{۲}$$

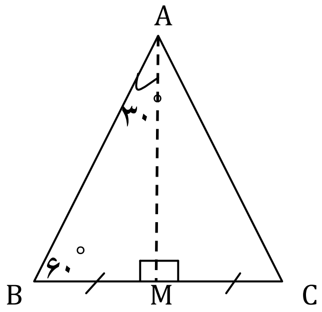
$$\tan ۶۰^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{۳}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \sqrt{۳}$$

$$\cot ۶۰^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

مثال : با در نظر گرفتن مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a ، نسبت های مثلثاتی ۳۰° و ۶۰° را به دست آورید

حل) در مثلث متساوی الاضلاع ABC، نیمساز زاویهٔ A رارسم می کنیم .(AM).

AM بر BC عمود است و آن را نصف می کند. بنابراین داریم: $BM = \frac{BC}{۲} = \frac{a}{۲}$



بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABM، داریم:

$$\mathrm{AM}^۲ = \mathrm{AB}^۲ - \mathrm{BM}^۲ = a^۲ - (\frac{a}{۲})^۲ = a^۲ - \frac{a^۲}{۴} = \frac{۳a^۲}{۴}$$

$$\Longrightarrow AM = \frac{\sqrt{۳}a}{۲}$$

نسبت های مثلثاتی زاویهٔ °۳۰ در مثلث قائم الزاویهٔ ABM :

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\frac{a}{۲}}{a} = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\frac{\sqrt{۳}a}{۲}}{a} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{AM}} = \frac{\frac{a}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}a}{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}, \cot ۳۰^\circ = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}} = \frac{\frac{\sqrt{۳}a}{۲}}{\frac{a}{۲}} = \sqrt{۳}$$

نسبت های مثلثاتی زاویهٔ °۶۰ در مثلث قائم الزاویهٔ ABM :

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\frac{\sqrt{۳}a}{۲}}{a} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

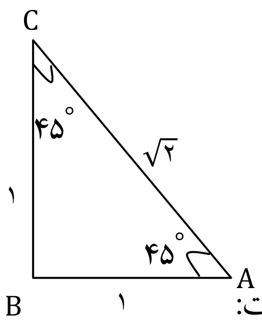
$$\cos ۶۰^\circ = \frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\frac{a}{۲}}{a} = \frac{۱}{۲}$$

$$\tan ۶۰^\circ = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}} = \frac{\frac{\sqrt{۳}a}{۲}}{\frac{a}{۲}} = \sqrt{۳}$$

$$\cot ۶۰^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{\frac{a}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}a}{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

مثال: با در نظر گرفتن مثلث قائم الزاویهٔ متساوی الساقین با ضلع های قائمه به طول ۱ ، نسبت های مثلثاتی ۴۵° را به دست آورید.

حل) بنا بر قضیهٔ فیثاغورس داریم:



$$AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ = ۱^۲ + ۱^۲ = ۲$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{۲}$$

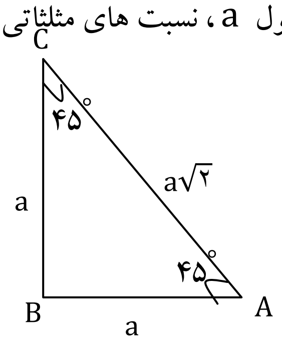
نسبت های مثلثاتی زاویهٔ A (یا c) در مثلث قائم الزاویهٔ ABC به صورت زیر است:

$$\sin ۴۵^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos ۴۵^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan ۴۵^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{۱}{۱} = ۱ \, , \cot ۴۵^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{۱}{۱} = ۱$$

مثال: با در نظر گرفتن مثلث قائم الزاویهٔ متساوی الساقین با ضلع های قائمه به طول a ، نسبت های مثلثاتی ۴۵° را به دست آورید.حل) بنا بر قضیهٔ فیثاغورس داریم:



$$AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ = a^۲ + a^۲ = ۲a^۲$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{۲a^۲} = a\sqrt{۲}$$

نسبت های مثلثاتی زاویهٔ A (یا c) در مثلث قائم الزاویهٔ ABC به صورت زیر است:

$$\sin ۴۵^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos ۴۵^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan ۴۵^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = ۱ , \cot ۴۵^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a} = ۱$$

مقدار نسبت های مثلثاتی زوایای $30^\circ, 45^\circ$ و 60°

مقدار	۳۰°	۴۵°	۶۰°
$Sin\ A$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
$Cos\ A$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
$Tan\ A$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$
$Cot\ A$	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

مثال : مقدار عددی عبارت $۳\sin ۳۰^\circ + ۴\sqrt{۲}\cos ۴۵^\circ - \sqrt{۳}\tan ۶۰^\circ$ را بدست آورید.

پاسخ: با توجه به این که $\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}, \cos ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $\tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳}$ می باشند، داریم:

$$۳\sin ۳۰^\circ + ۴\sqrt{۲}\cos ۴۵^\circ - \sqrt{۳}\tan ۶۰^\circ = ۳ \times \frac{۱}{۲} + ۴\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} - \sqrt{۳} \times \sqrt{۳}$$

$$= \frac{۳}{۲} + ۴ - ۳ = \frac{۳}{۲} + ۱ = \frac{۵}{۲}$$

مثال : مقدار عددی عبارت $\sqrt{۲}cos۴۵^\circ + ۲\sqrt{۳}\sin۶۰^\circ + \sqrt{۳}\tan۳۰^\circ$ را بدست آورید.

$$\sqrt{۲}cos۴۵^\circ + ۲\sqrt{۳}\sin۶۰^\circ + \sqrt{۳}\tan۳۰^\circ$$

$$= \sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} + ۲\sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۳} = ۱ + ۳ + ۱ = ۵$$

مثال : مقدار عددی عبارت $۴\sqrt{۲}\sin۴۵^\circ - ۵\cot۴۵^\circ - ۳\cos۶۰^\circ$ را بدست آورید.

$$۴\sqrt{۲}\sin۴۵^\circ - ۵\cot۴۵^\circ - ۳\cos۶۰^\circ$$

$$= ۴\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} - ۵(۱) - ۳ \times \frac{۱}{۲} = ۴ - ۵ - \frac{۳}{۲} = -۱ - \frac{۳}{۲} = \frac{-۵}{۲}$$

مثال : مقدار عددی عبارت $۸sin۳۰^\circ + \sqrt{۳}(\cot۶۰^\circ - \tan۶۰^\circ)$ را بدست آورید.

$$۸sin۳۰^\circ + \sqrt{۳}(\cot۶۰^\circ + \tan۶۰^\circ)$$

$$= ۸ \times \frac{۱}{۲} + \sqrt{۳}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳} + \sqrt{۳}\right) = ۴ + \sqrt{۳} \times \frac{۴\sqrt{۳}}{۳} = ۴ + ۴ = ۸$$

مثال : مقدار عددی عبارت $-sin۶۰^\circ + ۲\cos۳۰^\circ - ۴\cot۳۰^\circ + ۲\tan۴۵^\circ$ را بدست آورید.

$$-sin۶۰^\circ + ۲\cos۳۰^\circ - ۴\cot۳۰^\circ + ۲\tan۴۵^\circ$$

$$= -\frac{\sqrt{۳}}{۲} + ۲ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} - ۴ \times \sqrt{۳} + ۲(۱)$$

$$= -\frac{\sqrt{۳}}{۲} - ۳\sqrt{۳} + ۲ = \frac{-\sqrt{۳} - ۶\sqrt{۳}}{۲} + ۲ = \frac{-۷\sqrt{۳}}{۲} + ۲$$

مثال: حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.(زوایای داده شده بر حسب درجه هستند.)

$$۱)\sin۴۵\cos۴۵+\sin۶۰\cos۳۰=\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۲}{۴}+\frac{۳}{۴}=\frac{۵}{۴}$$

$$۲)۲\sin۳۰+\cos^{۲}۴۵-\sin^{۲}۶۰=۲\left(\frac{۱}{۲}\right)+\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^{۲}-\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^{۲}=۱+\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۴}=\frac{۴+۲-۳}{۴}=\frac{۳}{۴}$$

$$\boxed{a\sin^{m}\theta=a(\sin\theta)^{m}}$$

$$۳)\ \tan۳۰\cot۳۰+\sin^{۲}۳۰+\cos^{۲}۳۰=\frac{\sqrt{۳}}{۳}.\sqrt{۳}+\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}+\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^{۲}=۱+\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۴}=\frac{۸}{۴}=۲$$

$$۴)\ \sqrt{۳}\tan۶۰-\frac{\tan۳۰}{\sqrt{۳}}=\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}-\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۳}}{\frac{\sqrt{۳}}{۱}}=۳-\frac{۱}{۳}=\frac{۸}{۳}$$

$$۵)۱-۲\sin^{۴}۳۰+\frac{\cos^{۲}۳۰}{۲}=۱-۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۴}+\frac{\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^{۲}}{۲}=۱-۲\left(\frac{۱}{۱۶}\right)+\frac{\frac{۳}{۴}}{۲}=۱-\frac{۱}{۸}+\frac{۳}{۸}$$

$$=\frac{۱۰}{۸}=\frac{۵}{۴}$$

تمرین: حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

۱) $۲\tan۳۰\cot۳۰-۳\cot۴۵\tan۴۵$

۲) $(\cos۳۰-\sin۴۵)(\sin۶۰+\cos۴۵)$

۳) $\dfrac{۱+\tan۶۰+\tan^{۲}۶۰}{۱+\cot۶۰+\tan^{۲}۶۰}$

مثال: درستی تساوی های زیر را نشان دهید.

$$۱)۲\sin۳۰\cos۳۰=\sin۶۰\Longrightarrow ۲\left(\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$۲)۱ + tan^{۲}۶۰ = \frac{۱}{cos^{۲}۶۰} \to ۱ + (\sqrt{۳})^{۲} = \frac{۱}{(\frac{۱}{۳})^{۲}} \to ۱ + ۳ = \frac{۱}{\frac{۱}{۴}} \to ۴ = ۴$$

تمرین: درستی تساوی های زیر را نشان دهید.

$$۱)sin۴۵cos۴۵ = sin۳۰$$

$$۲)sin^{۲}۶۰ + cos^{۲}۶۰ = ۱$$

$$۳)\frac{sin^{۲}۴۵}{۲} = sin^{۲}۳۰$$

مثال : در مثلث قائم الزاویهٔ ABC, $\hat{B} = ۹۰^{\circ}$, $AB = ۴$ و $BC = ۶$ می باشد، حاصل هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید.

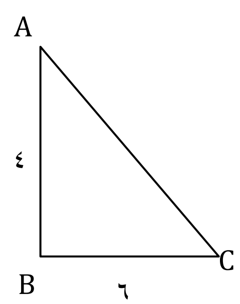
الف) $(cosA + sinC)(cosA - sinC)$

ب) $\tan A(tanC + cotC)$

حل) مطابق شکل و با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، طول وتر AC را به دست می آوریم:

$$AC^{۲} = AB^{۲} + BC^{۲} = ۱۶ + ۳۶ = ۵۲$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{۵۲}$$



الف)

$$cosA = \frac{AB}{AC} = \frac{٤}{\sqrt{٥٢}} \ , sinC = \frac{AB}{AC} = \frac{۴}{\sqrt{۵۲}}$$

$$(cosA + sinC)(cosA - sinC) = (cosA)^{۲} - (sinC)^{۲}$$

$$= \frac{۱٦}{٥۲} - \frac{۱٦}{٥۲} = ۰$$

ب)

$$\tan A=\frac{BC}{AB}=\frac{٦}{٤}=\frac{٣}{٢}\quad ,\qquad \tan C=\frac{AB}{BC}=\frac{٤}{٦}=\frac{٢}{٣}$$

$$\cot C=\frac{BC}{AB}=\frac{٦}{٤}=\frac{٣}{٢}$$

$$tanA\,(tanC+cotC)=\frac{۳}{۲}\left(\frac{۲}{۳}+\frac{۳}{۲}\right)=\frac{۳}{۲}\times\left(\frac{۴+۹}{۶}\right)=\frac{۱۳}{۴}$$

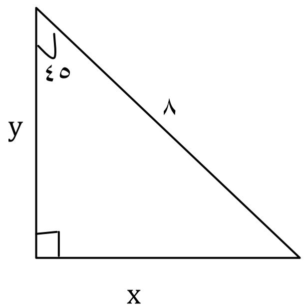
مثال: در هرشکل مقادیر مجهول را بدست آورید.

الف) $sin۴۵^\circ=\frac{x}{۸}$

$\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{x}{۸}\to x=۴\sqrt{۲}$

$cos۴۵^\circ=\frac{y}{۸}$

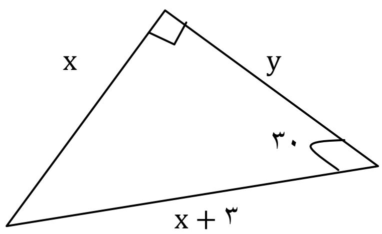
$\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{y}{۸}\to y=۴\sqrt{۲}$



ب) $sin۳۰^\circ=\frac{x}{x+۳}$

$\frac{۱}{۲}=\frac{x}{x+۳}\to ۲x=x+۳\to x=۳$

فیثاغورس $y^۲=۳^۲+۶^۲$



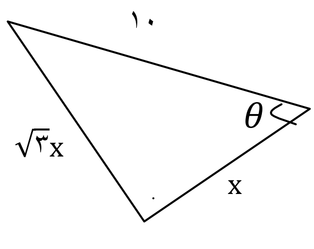
$y^۲=۹+۳۶\to y^۲=۴۵\to y=\sqrt{۴۵}=۳\sqrt{۵}$

پ) $tan\theta=\frac{\sqrt{۳}x}{x}=\sqrt{۳}$

$\Longrightarrow \theta=۶۰^\circ$

$cos\theta=\frac{x}{۱۰}$

$cos۶۰^\circ=\frac{x}{۱۰}$



$\frac{۱}{۲} = \frac{x}{۱۰} \to x = ۵$

ت) در مثلث قائم الزاویه بزرگ $sin۶۰^\circ = \frac{۱۵\sqrt{۳}}{t} \to \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۱۵\sqrt{۳}}{t} \Longrightarrow t = ۳۰$

رابطه فیثاغورس مثلث قائم الزاویه بزرگ $\Longrightarrow t^۲ = (۱۵\sqrt{۳})^۲ + x^۲$

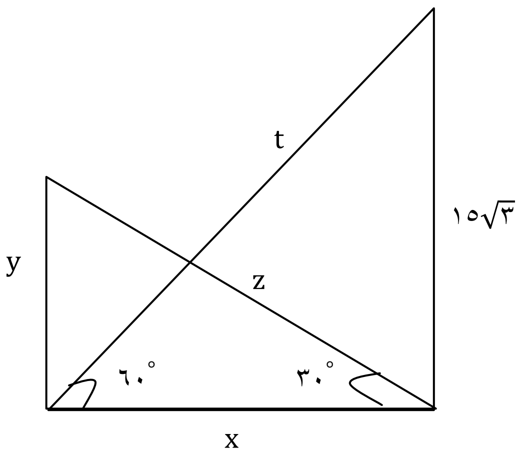
$\Longrightarrow ۳۰^۲ = ۶\sqrt{۵} + x^۲$

$۹۰۰ - ۶\sqrt{۵} = x^۲ \Longrightarrow ۲۲۵ = x^۲ \Longrightarrow ۱۵ = x$

در مثلث قائم الزاویه کوچک $cos۳۰^\circ = \frac{x}{z}$

$\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۱۵}{z} \to z = \frac{۳۰}{\sqrt{۳}} = \theta۱۰\sqrt{۳}$

$sin۳۰^\circ = \frac{y}{z} \to \frac{۱}{۲} = \frac{y}{۱۰\sqrt{۳}} \to y = ۵\sqrt{۳}$



ث) $sin۵۳^\circ = cos۳۷^\circ$ $\qquad sin۳۷ = ۰/۶ \quad , cos۳۷ = ۰/۸$

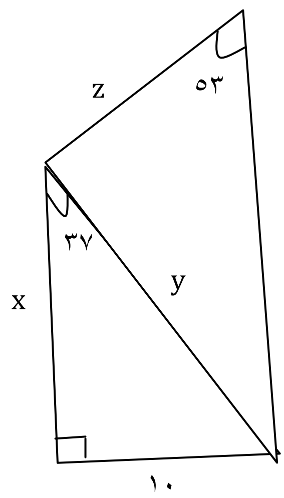
$sin۵۳^\circ = \frac{y}{z} \Longrightarrow ۰/۸ = \frac{۱۰}{\frac{y}{z}} \to z = \frac{۱۰}{\frac{y}{۸}} \times ۱۰$

$z = \frac{۱۰۰}{y}$

$sin۳۷^\circ = \frac{۱۰}{y}$

$۰/۶ = \frac{۱۰}{y} \to y = \frac{۱۰۰}{۶}$

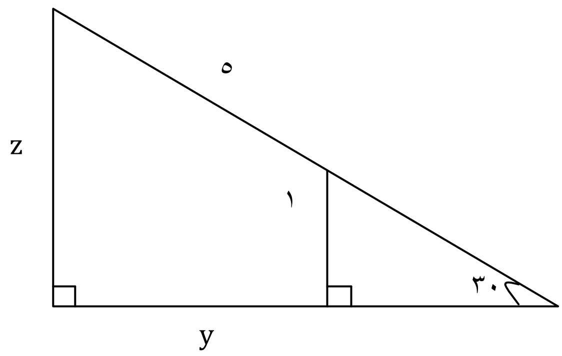
$cos۳۷^\circ = \frac{x}{y} \quad , ۰/۸ = \frac{۸}{\frac{۱۰۰}{۶}} \to x = \frac{۸\times\frac{۱۰۰}{۶}}{۱۰} = \frac{۸۰}{۶}$



ج) در مثلث کوچک $tan۳۰^\circ = \frac{۱}{x} \to \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۱}{x} \to x = \frac{۳}{\sqrt{۳}} = \sqrt{۳}$

در مثلث بزرگ $sin۳۰^\circ = \frac{z}{۵} \to \frac{۱}{۲} = \frac{z}{۵} \to z = \frac{۵}{۲}$

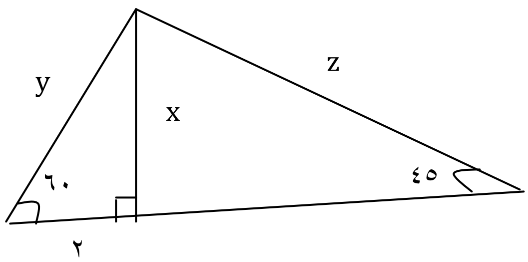
در مثلث بزرگ $cos۳۰^\circ = \frac{x+y}{۵} \to \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\sqrt{۳}+y}{۵} \to ۵\sqrt{۳} = ۲\sqrt{۳} + ۲y \to \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} = y$



ج) در مثلث قائم الزاویه کوچک $cos۶۰^\circ = \frac{۲}{y} \to \frac{۱}{۲} = \frac{۲}{y} \to y = ۴$

در مثلث قائم الزاویه کوچک $sin۶۰^\circ = \frac{x}{y} \to \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{x}{۴} \to x = ۲\sqrt{۳}$

در مثلث بزرگ $sin۴۵^\circ = \frac{x}{z} \to \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۲\sqrt{۳}}{z} \to z = \frac{۴\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}$



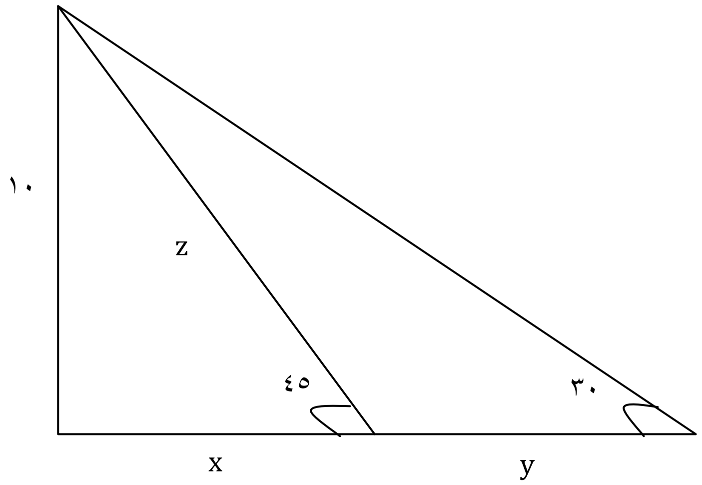
ح) در مثلث قائم الزاویه کوچک $\Longrightarrow sin۴۵^\circ = \frac{۱۰}{z}$

$$\Longrightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۱۰}{z} \to z = \frac{۳۰}{\sqrt{۲}} = ۱۰\sqrt{۲}$$

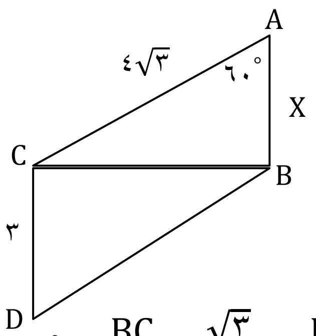
در مثلث قائم الزاویه کوچک $\cos ۴۵ = \frac{x}{z} \to \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{x}{۱۰\sqrt{۲}} \to x = ۱۰$

در مثلث قائم الزاویه بزرگ $\tan ۳۰^\circ = \frac{۱۰}{x+y} \to \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۱۰}{۱۰+y}$

$$\Longrightarrow ۱۰\sqrt{۳} + \sqrt{۳}y = ۳۰ \to y = \frac{۳۰ - ۱۰\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}$$



مثال : در شکل رو به رو ، نسبت های مثلثاتی زاویهٔ D را به دست آورید.



حل) در مثلث قائم الزاویهٔ ABC ، داریم:

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{BC}{AC} \to \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{BC}{۴\sqrt{۳}} \Longrightarrow BC = ۴\sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۶$$

در مثلث قائم الزاویهٔ BCD و با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، طول وتر BD را به دست می آوریم:

$$BD^۲ = BC^۲ + CD^۲ = ۶^۲ + ۳^۲ = ۳۶ + ۹ = ۴۵$$

$$\Longrightarrow BD = \sqrt{۴۵} = \sqrt{۹ \times ۵} = ۳\sqrt{۵}$$

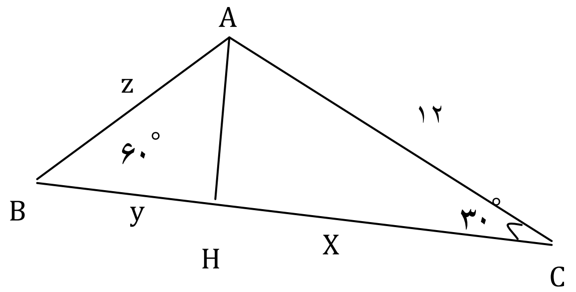
بنابراین:

$$\sin D = \frac{BC}{BD} = \frac{۶}{۳\sqrt{۵}} = \frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

$$\cos D = \frac{CD}{BD} = \frac{۳}{۳\sqrt{۵}} = \frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

$$\tan D = \frac{BC}{CD} = \frac{۶}{۳} = ۲\,, \qquad \cot D = \frac{CD}{BC} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

مثال : در مثلث روبه رو، مقادیر y, x و Z را به دست آورید.



حل) در مثلث قائم الزاویهٔ ACH داریم:

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{CH}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{x}{۱۲} \Rightarrow x = ۱۲ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۶\sqrt{۳}$$

حال برای به دست آوردن AH به دو روش می توان عمل کرد:

روش اول: بنابر قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$AH^۲ = AC^۲ - CH^۲ = ۱۲^۲ - (۶\sqrt{۳})^۲$$

$$= ۱۴۴ - ۱۰۸ = ۳۶ \Rightarrow AH = ۶$$

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{AH}{۱۲} \Rightarrow AH = \frac{۱۲}{۲} = ۶$$

در مثلث قائم الزاویهٔ ABH، داریم:

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۶}{z} \Rightarrow \sqrt{۳}z = ۱۲$$

$$\Rightarrow z = \frac{۱۲}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{۱۲\sqrt{۳}}{۳} = ۴\sqrt{۳}$$

از دو روش برای به دست آوردن y استفاده می کنیم:

روش اول:

$$BH^{۲} = AB^{۲} - AH^{۲} = \left(٤\sqrt{۳}\right)^{۲} - ٦^{۲} = ٤٨ - ٣٦ = ١٢$$

$$\Longrightarrow y = BH = \sqrt{۱۲} = \sqrt{۴ \times ۳} = ۲\sqrt{۳}$$

روش دوم:

$$\cos ٦٠^{\circ} = \frac{BH}{AB} \Longrightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{y}{٤\sqrt{۳}} \Longrightarrow y = \frac{٤\sqrt{۳}}{۲} = ۲\sqrt{۳}$$

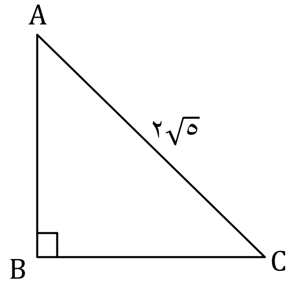
مثال : در مثلث قائم الزاویهٔ ABC, $B = ۹۰^{\circ}$ ؛ طول وتر $۲\sqrt{۵}$ و $\tan C = ۲$ می باشد.

الف) طول اضلاع قائم مثلث را به دست آورید .

ب) نسبت های مثلثاتی زاویهٔ A را به دست آورید .

حل الف) داریم:

$$\tan C = \frac{AB}{BC} = ۲ \Longrightarrow AB = ۲BC \quad (*)$$



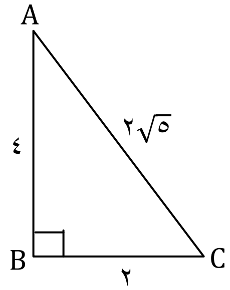
بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC داریم:

$$AC^{۲} = AB^{۲} + BC^{۲} \overset{(*)}{\rightarrow} \left(۲\sqrt{۵}\right)^{۲} = (۲BC)^{۲} + BC^{۲}$$

$$\Longrightarrow ۲۰ = ۴BC^{۲} + BC^{۲} \Longrightarrow ۵BC^{۲} = ۲۰ \Longrightarrow BC^{۲} = \frac{۲۰}{۵} = ٤$$

$$\Longrightarrow BC = ۲ \overset{(*)}{\rightarrow} AB = ۴$$

ب)



$$\mathrm{sinA} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{۲}{۲\sqrt{٥}} = \frac{۱}{\sqrt{٥}}$$

$$\mathrm{cosA} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \frac{٤}{۲\sqrt{٥}} = \frac{۲}{\sqrt{٥}}$$

$$\mathrm{tanA} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{۲}{٤} = \frac{۱}{۲} \;, \mathrm{cotA} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} = \frac{٤}{۲} = ۲$$

مثال : در هر یک از قسمت های زیر، مقدار X را به دست آورید

الف) $$x\cos۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}\tan۳۰^\circ - ۴\sin۳۰^\circ}{۲\sqrt{۲}\cos۴۵^\circ + \tan۴۵^\circ}$$

حل) ابتدا حاصل سمت راست تساوی را به دست آورده و آن را با عبارت سمت چپ مساوی قرار می دهیم .

سپس با حل معادله، مقدار x را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{۳}tan۶۰^\circ - ۴sin۳۰^\circ}{۲\sqrt{۲}\cos۴۵^\circ + \tan۴۵^\circ} = \dfrac{\sqrt{۳} \times \frac{۱}{\sqrt{۳}} - ۴ \times \frac{۱}{۲}}{۲\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} + ۱} = \dfrac{۱ - ۲}{۲ + ۱} = \dfrac{-۱}{۳} \\ \mathrm{x}\cos۶۰^\circ = \frac{۱}{۲}\mathrm{x} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{۱}{۲}x = \frac{-۱}{۳} \Longrightarrow \mathrm{x} = -\frac{۲}{۳}$$

$$\sin^۲۴۵^\circ = (\sin۴۵^\circ)^۲ = (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ = \frac{\sqrt{۲} \times \sqrt{۲}}{۲ \times ۲} = \frac{۱}{۲}$$

ب) $\text{۲۰}sinx = \dfrac{\text{۲}tan\text{۳۰}^\circ + cot\text{۳۰}^\circ}{\frac{\text{۱}}{\text{۳}}(cot\text{۴۵}^\circ - \sin^{\text{۲}}\text{۴۵}^\circ)} \quad , \quad \text{۰}^\circ < x < \text{۹۰}^\circ$

حل) ابتدا حاصل سمت راست تساوی را به دست آورده و آن را با عبارت سمت چپ مساوی قرار می دهیم .

سپس با حل معادله، مقدار x را به دست می آوریم:

$$\sin^{\text{۲}}\text{۴۵}^\circ = (\sin\text{۴۵}^\circ)^{\text{۲}} = (\frac{\sqrt{\text{۲}}}{\text{۲}})^{\text{۲}} = \frac{\sqrt{\text{۲}}\times\sqrt{\text{۲}}}{\text{۲}\times\text{۲}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}$$

$$\frac{\text{۲}\tan\text{۳۰}^\circ + \cot\text{۳۰}^\circ}{\frac{\text{۱}}{\text{۳}}(\cot\text{۴۵}^\circ - \sin^{\text{۲}}\text{۴۵}^\circ)} = \frac{\text{۲}\times\frac{\sqrt{\text{۳}}}{\text{۳}} + \sqrt{\text{۳}}}{\frac{\text{۱}}{\text{۳}}(\text{۱} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}})} = \frac{\frac{\text{۵}\sqrt{\text{۳}}}{\text{۳}}}{\frac{\text{۱}}{\text{۶}}} = \text{۱۰}\sqrt{\text{۳}}$$

$$\Longrightarrow \text{۲۰}\sin x = \text{۱۰}\sqrt{\text{۳}} \Longrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{\text{۳}}}{\text{۲}} \,, \text{۰}^\circ < x < \text{۹۰}^\circ \Longrightarrow x = \text{۶۰}^\circ$$

مثال : اگر $\text{۰}^\circ < \alpha < \text{۹۰}^\circ$ و $\tan\alpha = \frac{\sqrt{\text{۳}}}{\text{۳}}$ باشد، حاصل هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید:

الف) $-\text{۲}sin\alpha + \sqrt{\text{۳}}\cot\alpha$

حل) چون $\text{۰}^\circ < \alpha < \text{۹۰}^\circ$ و $\tan\alpha = \frac{\sqrt{\text{۳}}}{\text{۳}}$ است، بنابراین: $\alpha = \text{۳۰}^\circ$

$$-\text{۲}sin\alpha + \sqrt{\text{۳}}\cot\alpha = -\text{۲}\sin\text{۳۰}^\circ + \sqrt{\text{۳}}\cot\text{۳۰}^\circ$$

$$= -\text{۲}\times\frac{\text{۱}}{\text{۲}} + \sqrt{\text{۳}}\times\sqrt{\text{۳}} = -\text{۱} + \text{۳} = \text{۲}$$

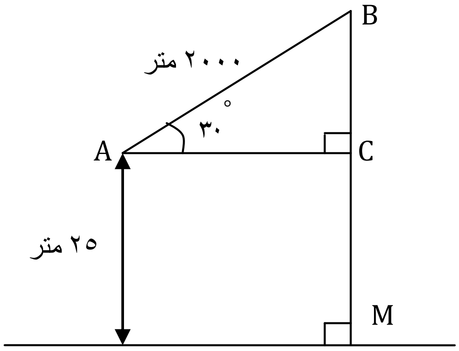
ب) $\text{۴}cos\text{۲}\alpha + \cot(\alpha + \text{۱۵}^\circ)$

حل)

$$\text{۴}cos^{\text{۲}}\alpha + \tan(\alpha + \text{۱۵}^\circ) = \text{۴}\cos^{\text{۲}}(\text{۳۰}^\circ) + \cot(\text{۳۰}^\circ + \text{۱۵}^\circ)$$

$$= ۴\cos ۶۰^{\circ} + cot\, ۴۵^{\circ} = ۴ \times \frac{۱}{۲} + ۱ = ۲ + ۱ = ۳$$

مثال : یک موشک در ارتفاع ۲۵ متری از سطح زمین و با زاویهٔ ۳۰° پرتاب می شود. می خواهیم بدانیم پس از طی ۲۰۰۰ متر با همین زاویه، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می رسد؟



حل: ابتدا یک مدل ریاضی برای حل این مسئله می سازیم . با توجه به شکل زیر، به سادگی می توان دید، ارتفاع موشک از سطح زمین برابر است با:

$$\mathrm{BC} + \mathrm{MC} = \mathrm{BC} + ۲۵$$

بنابراین کافی است طول BC را پیدا کنیم . می دانیم $\sin ۳۰^{\circ} = \frac{۱}{۲}$. پس در مثلث قائم الزاویه ABC داریم:

$$\sin ۳۰^{\circ} = \frac{۱}{۲} = \frac{\mathrm{BC}}{۲۰۰۰} \Longrightarrow \mathrm{BC} = ۱۰۰۰$$

و از این رو

$$\text{ارتفاع موشک} = ۱۰۰۰ + ۲۵ = ۱۰۲۵$$

مثال : یک موشک از ارتفاع ۲۰ متری از سطح زمین و با زاویهٔ ۶۰° پرتاب می شود. موشک پس از طی $۶۰۰\sqrt{۳}$ متر با همین زاویه، به چه ارتفاعی از سطح زمین می رسد؟

حل) شکل هندسی رو به رو را برای حل این مسأله در نظر می گیریم.

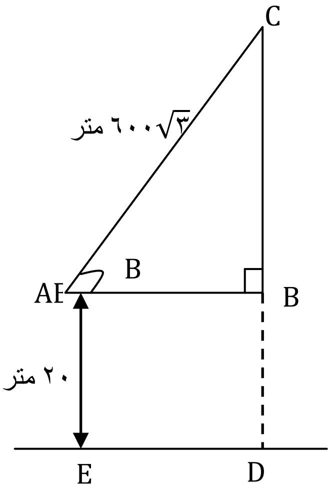
پس از طی $۶۰۰\sqrt{۳}$ متر، ارتفاع موشک از سطح زمین برابر $DB + BC$ است. داریم:

$$\overset{\Delta}{ABC} : \widehat{B} = ۹۰ \Longrightarrow \sin ۶۰^{\circ} = \frac{BC}{AC}$$

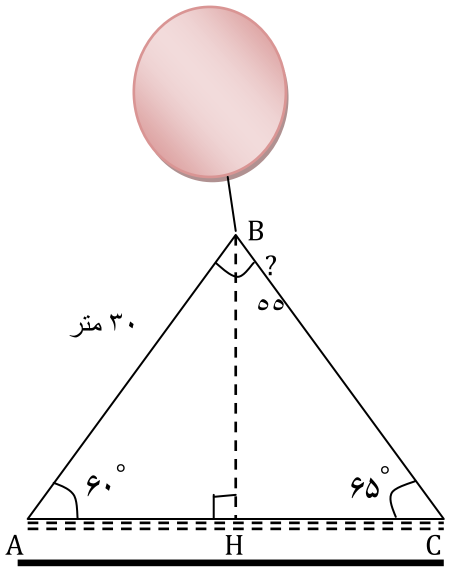
$$\Longrightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{BC}{۶۰۰\sqrt{۳}} \Longrightarrow BC = ۶۰۰\sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۹۰۰$$

$$DB = AE = ۲۰$$

$$\Longrightarrow DC = DB + BC = ۲۰ + ۹۰۰ = ۹۲۰$$



مثال: در راه پیمایی ۲۲ بهمن، یک بالن اطلاع رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول یکی از طناب ها ۳۰ متر است. طول طناب دوم را پیدا کنید؟ $\sin ۶۵^{\circ} = ۰/۹$



حل) ابتدا ارتفاع وارد بر ضلع AC را رسم می کنیم و آن را BH می نامیم.

سپس طول BH را با استفاده از سینوس زاویهٔ A به دست می آوریم.

$$\sin ٦٠^\circ = \frac{BH}{AB} \rightarrow BH = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times ٣٠ = ١٥\sqrt{٣}$$

اکنون با استفاده از سینوس زاویهٔ ۶۵°، طول طناب دوم را پیدا کنید.

$$\overset{\Delta}{BHC} \rightarrow \sin ٦٥^\circ = \frac{BH}{BC} \rightarrow BC = \frac{BH}{\sin ٦٥} = \frac{١٥\sqrt{٣}}{٠ / ٩} \cong ٢٨ / ٨٦$$

مثال: در یک جاده کوهستانی مشابه شکل زیر، طول جاده سرپائینی ۱۲ m و زاویه جاده ی سربالایی و سرپائینی با سطح زمین به ترتیب $۴۵^\circ, ۳۰^\circ$ است:

الف) ارتفاع قله را بدست آورید.

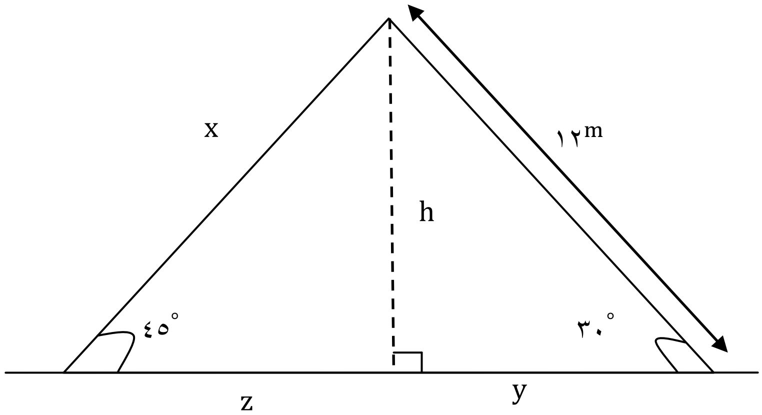
ب) طول جاده سربالایی را بدست آورید.

پ) طول تونل احداث شده بین دو نقطه ی A و B چقدر است؟

$$\text{الف)}\ \sin ۳۰^\circ = \frac{h}{۱۲} \rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{h}{۱۲} \rightarrow h = ۶$$

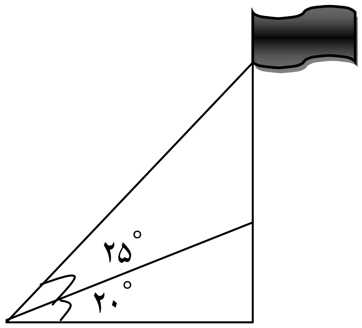
$$\text{ب)}\ \sin ۴۵^\circ = \frac{h}{x} \rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۶}{x} \rightarrow x = \frac{۱۲}{\sqrt{x}} = \text{گویا}\ ۶\sqrt{۲}$$

$$\text{ج)} \begin{cases} \cos ۳۰^\circ = \dfrac{y}{۱۲} \rightarrow \dfrac{\sqrt{۳}}{۲} = \dfrac{y}{۱۲} \rightarrow y = ۶\sqrt{۳} \\ \cos ۴۵^\circ = \dfrac{z}{x} \rightarrow \dfrac{\sqrt{۲}}{۲} = \dfrac{z}{۶\sqrt{۲}} \rightarrow z = ۶ \end{cases} \quad \text{طول تونل} = y + z = ۶\sqrt{۳} + ۶$$

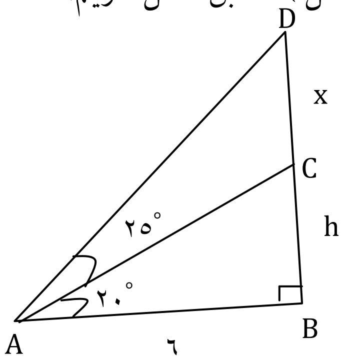


مثال : مطابق شکل، شخصی در فاصلهٔ ۶ متری ستونی ایستاده که بر بالای آن میلهٔ پرچمی نصب شده است.

طول میله را با فرض $tan۲۰^{\circ} = ۰ / ۳۶$ به دست آورید.



حل) مطابق شکل داریم:



$\hat{A}BC: \tan ۲۰^{\circ} = \frac{BC}{AB}$

$\Rightarrow ۰/۳۶ = \frac{h}{۶}$

$\Rightarrow h = ۶ \times ۰/۳۶ = ۲/۱۶ \quad (*)$

در مثلث قائم الزاویهٔ ABD، $A = ۴۵^{\circ}$. داریم:

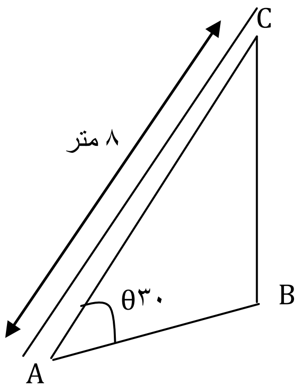
$$\tan A = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \tan ٤٥^{\circ} = \frac{h+x}{٦} \Rightarrow ١ = \frac{h+x}{٦}$$

$$\xrightarrow{(*)} ۲/۱۶ + x = ۶ \Rightarrow x = ۳/۸۴$$

بنابراین طول میلهٔ پرچم ۳/۸۴متر است.

جزوات کنکوری تمام مباحث ریاضیات تالیف حبیب هاشمی در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour

مثال :مطابق شکل مقابل، نردبانی به طول ۸ متر در زیر پنجرهٔ ساختمانی قرار گرفته است. اگر زاویهٔ نردبان با سطح زمین $\theta = ۳۰^\circ$ باشد، ارتفاع پنجره تا زمین را محاسبه کنید. فاصلهٔ پای نردبان تا ساختمان چقدر است؟



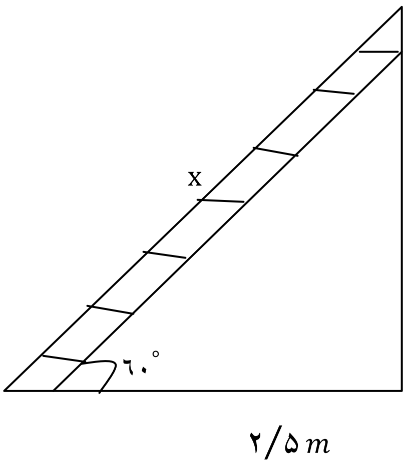
$$\sin\theta = \frac{BC}{۸} \Longrightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{BC}{۸} \Longrightarrow ۲BC = ۸ \Longrightarrow BC = ۴$$

اکنون به کمک رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$AB^{۲} = AC^{۲} - BC^{۲} = ۸^{۲} - ۴^{۲} = ۴۸ \Longrightarrow AB = \sqrt{۴۸} = ۴\sqrt{۳}$$

مثال: اگر نردبانی را به دیواری تکیه داده باشیم بطوریکه فاصله ی پای نردبان تا دیوار $۲/۵\,m$ باشد و زاویه ای که نردبان با سطح افق می سازد، ۶۰° باشد، طول نردبان را محاسبه کنید. انتهای نردبان در چه ارتفاعی از سطح زمین قرار گرفته است؟

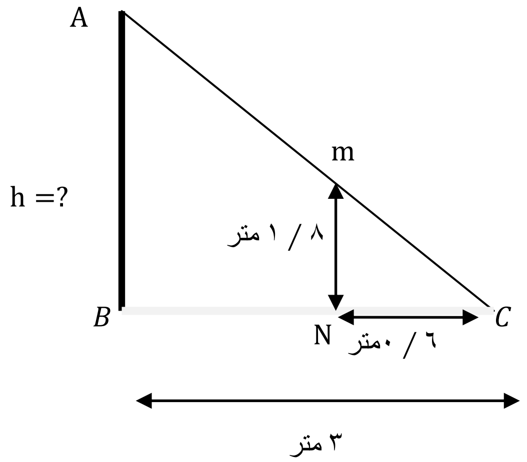
$$cos۶۰^\circ = \frac{۲/۵}{x} \to \frac{۱}{۲} = \frac{۲/۵}{x} \to x = ۵$$



مثال : کیان می خواهد ارتفاع یک تیر برق را که طول سایهٔ آن ۳ متر است، حساب کند. قد کیان ۱ / ۸ متر و سایهٔ او در همان لحظه ۰ / ۶ متر است. ارتفاع تیر برق چقدر است؟

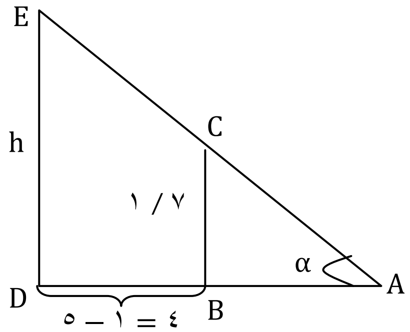
$$\begin{cases}\hat{B}=\hat{N}=۹۰^\circ \\ \hat{C}=\hat{C}\end{cases} \rightarrow \overset{\Delta}{\overbrace{ABC}} \sim \overset{\Delta}{\overbrace{MNC}} \Longrightarrow$$

$$\frac{\cancel{CN}}{\cancel{CB}}=\frac{CM}{AC}=\frac{\cancel{MN}}{\cancel{AB}} \rightarrow \frac{۰/۶}{۳}=\frac{۱/۸}{h} \rightarrow h=\frac{۵/۴}{۰/۶}=۹m$$



مثال : کمیل می خواهد ارتفاع یک میله را که طول سایهٔ آن ۵ متر است، حساب کند. قد علی ۱ / ۷ متر و طول سایهٔ او در همان لحظه ۱ متر است. ارتفاع میله چه قدر است؟

حل) فرض کنیم ED میلهٔ مورد نظر باشد. حال کمیل باید در نقطه ای قرار بگیرد که انتهای سایه های میله و خودش بر هم منطبق شوند. فرض کنیم α زاویهٔ پرتو تابش خورشید با سطح افق باشد . در این صورت:



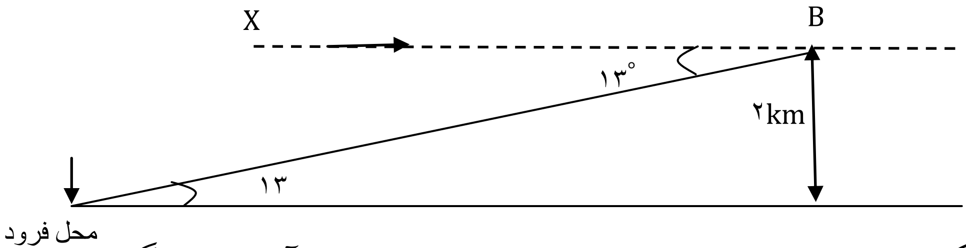
$$ABC: \tan\alpha = \frac{BC}{AB} \quad (۱), \qquad ADE: \tan\alpha = \frac{DE}{AD} \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Longrightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD} \Longrightarrow \frac{۱/۷}{۱} = \frac{h}{۵} \Longrightarrow h = ۵ \times ۱/۷ = ۸/۵$$

مثال : یک هواپیما در ارتفاع $۲km$ از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویهٔ هواپیما با افق حدود ۱۳° باشد، هواپیما در چه فاصله ای از نقطهٔ A فرود می آید.

$$\tan ۱۳^\circ \cong ۰/۲۳ \qquad BX \parallel AC \xrightarrow{\text{مورب } CB} \widehat{B_۱} = \hat{C} = ۱۳^\circ$$

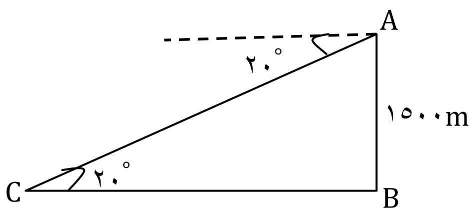
$$\tan ۱۳^\circ = \frac{AB}{AC} \to AC = \frac{۲}{۰/۲۳} \to AC \cong ۸/۶۹\ km$$



مثال : یک هواپیما در ارتفاع ۱۵۰۰ متری از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویهٔ هواپیما با افق ۲۰° باشد، هواپیما تقریباً چه مسافتی را طی می کند تا روی زمین بنشیند؟ $(\sin ۲۰^\circ = ۰/۳۴)$

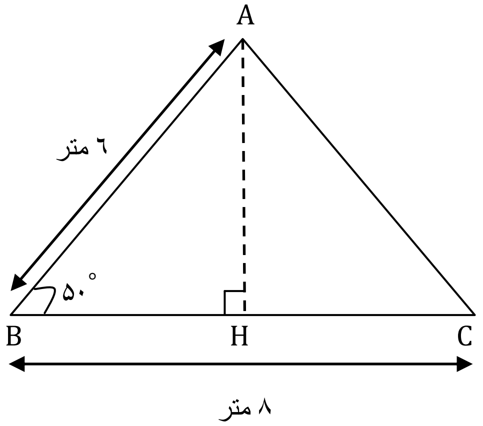
حل) مطابق شکل، اگر هواپیما در نقطهٔ A باشد، آن گاه بنابر قضیهٔ موازی و مورب، اندازهٔ زاویهٔ C برابر ۲۰° است و داریم (C محل فرود هواپیما است):

$$\sin C = \frac{AB}{AC} \Longrightarrow \sin ۲۰^\circ = \frac{۱۵۰۰}{AC} \Longrightarrow AC = \frac{۱۵۰۰}{۰/۳۴} \cong ۴۴۱۲$$



محاسبه مساحت مثلث با داشتن دوضلع و زاویه بین آن ها

می خواهیم مساحت مثلث ABC در شکل زیر را پیدا کنیم. می دانیم:



$$\text{مساحت مثلث ABC} = \frac{۱}{۲} \times \text{قاعده} \times \text{ارتفاع}$$

الف) با توجه به اینکه $\sin ۵۰^\circ = ۰/۷۶$، داریم:

$$\sin ۵۰^\circ = \frac{AH}{\text{وتر}} = \frac{AH}{۶} \Longrightarrow AH = ۰/۷۶ \times ۶ = ۴/۵۶$$

ب) با توجه به قسمت (الف) داریم:

$$\text{مساحت مثلث ABC} = \frac{۱}{۲} AH \times BC = \frac{۱}{۲} \times ۴/۵۶ \times ۸ \cong ۱۸/۲۴$$

قضیه : در مثلث دلخواه ABC، داریم:

$$\text{مساحت مثلث ABC} = S = \frac{۱}{۲} \times AB \times AC \times \sin A$$

به زبان ساده ، مساحت مثلث دلخواه ABC برابر است با نصف حاصل ضرب طول دو ضلع مثلث در سینوس زاویهٔ بین آنها

اثبات) در مثلث ABD ، ارتفاع BH را رسم می کنیم. داریم:

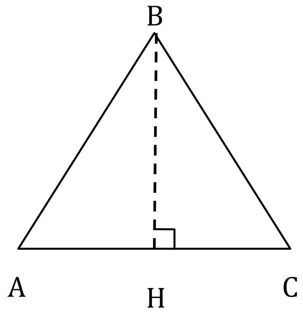
$$s = \frac{۱}{۲} \times BH \times AC \quad (۱)$$

از طرفی در مثلث قائم الزاویهٔ ABH، داریم:

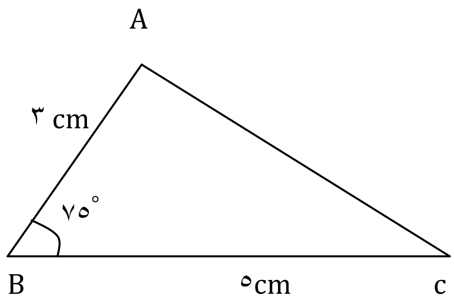
$$\sin A = \frac{BH}{AB} \Longrightarrow BH = AB \times \sin A \quad (۲)$$

$$(۱)(۲) \Longrightarrow S = \frac{۱}{۲} \times (AB \times \sin A) \times AC$$

$$= \frac{۱}{۲} \times AB \times AC \times \sin A$$



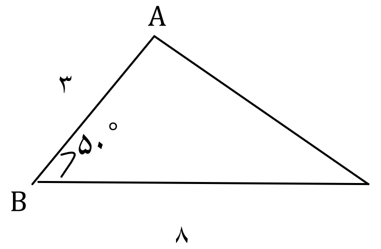
مثال : فرض کنید $\sin ۷۵^\circ = ۰ / ۹۶$. مساحت مثلث ABCدر شکل زیر را به دست آورید.



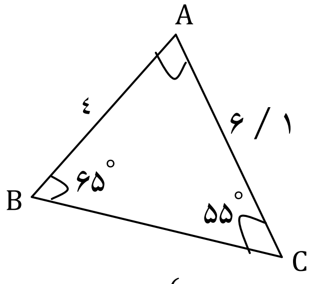
$$S = \frac{۱}{۲} AB \times BC \sin ۷۵^\circ$$

$$S = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۵ \times ۰/۹۶ = ۷ / ۲$$

مثال : در هر یک از شکل های زیر، مساحت مثلث ها را به دست آورید: $(\sin ۵۰^\circ = ۰/۷۶)$



الف)



ب)

حل) مساحت مثلث ABC برابر است با:

الف)

$$S = \frac{۱}{۲} \times BA \times BC \times \sin ۵۰^\circ = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۸ \times ۰/۷۶ = ۹/۱۲$$

ب) مجموع زاویه های داخلی هر مثلث برابر ۱۸۰° است. پس:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = ۱۸۰^\circ \Longrightarrow \widehat{A} + ۶۵^\circ + ۵۵^\circ = ۱۸۰^\circ$$

$$\Longrightarrow \hat{A} = ۱۸۰^\circ - ۱۲۰^\circ = ۶۰^\circ$$

$$\Longrightarrow S = \frac{۱}{۲} \times AB \times AC \times \sin ۶۰ = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۶/۱ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۲۴/۴}{۴}\sqrt{۳}$$

مثال : در هر یک از قسمت های زیر، مساحت شکل را به دست آورید.

الف) طول دو ضلع مثلث $۳\sqrt{۲}$ و ۶ و زاویهٔ بین آن ها ۴۵° است .

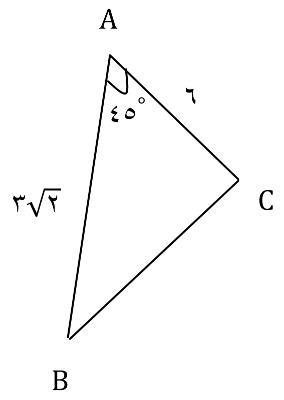
ب) طول اضلاع متوازی اضلاع ۷ و ۱۶ و اندازهٔ یک زاویهٔ آن ۶۰° است .

پ) طول ضلع لوزی ۸ و یک زاویهٔ آن ۳۰° است .

حل الف)

$$S = \frac{۱}{۲} \times AB \times AC \times \sin ۴۵^\circ$$

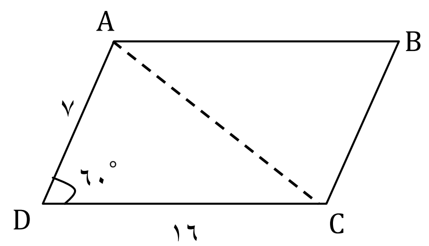
$$= \frac{۱}{۲} \times ۳\sqrt{۲} \times ۶ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۹$$



ب) اگر قطر متوازی الاضلاع را رسم کنیم، متوازی الاضلاع به دو مثلث هم نهشت تقسیم می شود. بنابراین با توجه به شکل داریم:

$$S_{\overset{\Delta}{ADC}} = \frac{۱}{۲} \times DA \times DC \times \sin ۶۰^\circ$$

$$= \frac{۱}{۲} \times ۷ \times ۱۶ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۲۸\sqrt{۳}$$



مساحت متوازی الاضلاع ABCD ، دو برابر مساحت مثلث ADC است. پس:

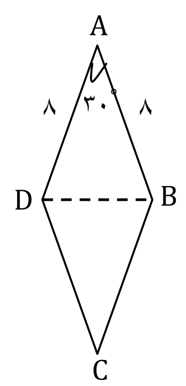
$$\text{مساحت متوازی الاضلاع } ABCD = ۲ \times ۳۰\sqrt{۳۰} = ۶۰\sqrt{۳}$$

پ)اگر قطر لوزی را رسم کنیم، لوزی به دو مثلث یکسان تقسیم می شود:

$$S_{\overset{\Delta}{ABD}} = \frac{۱}{۲} \times AB \times AD \times \sin ۳۰^\circ$$

$$= \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۸ \times \frac{۱}{۲} = ۱۶$$

$$\Longrightarrow S_{ABCD} = ۲S_{\overset{\Delta}{ABD}} = ۲ \times ۱۶ = ۳۲$$



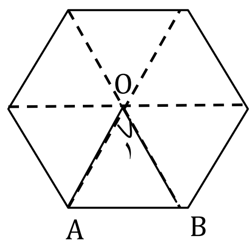
مثال : مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a را به دست آورید.

حل) در مثلث متساوی الاضلاع، طول هر سه ضلع برابر a و هر زاویه آن ۶۰° می باشد، بنابراین:

$$S = \frac{۱}{۲} \times AB \times AC \times \sin ٦٠^\circ = \frac{۱}{۲} \times a \times a \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{٤} a^{۲}$$

مثال : مساحت شش ضلعی منتظمی به ضلع a را به دست آورید.

حل اگر مرکز شش ضلعی منتظم را به رأس های آن وصل کنیم، ۶ مثلث مساوی ایجاد می شود مثلث OAB متساوی الاضلاع است . زیرا:



$$O_{۱} = \frac{٣٦٠^\circ}{٦} = ٦٠^\circ \ , OA = OB$$

$\Longrightarrow$ مثلث OAB متساوی الاضلاع است.

$$\Longrightarrow OA = OB = AB = a$$

$$\Longrightarrow S_{\overset{\Delta}{OAB}} = \frac{۱}{۲} \times OA \times OB \times sin۶۰^\circ$$

$$= \frac{۱}{۲} \times a \times a \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{٤} a^{۲}$$

بنابراین:

$$\text{مساحت شش ضلعی منتظم} = ۶S_{\overset{\Delta}{OAB}} = ۶ \times \frac{\sqrt{۳}}{۴} a^{۲} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} a^{۲}$$

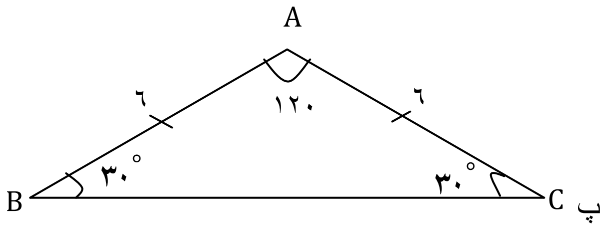
مثال : مساحت شش ضلعی منظم به ضلع ۳ را به دست آورید.

$$\text{مساحت شش ضلعی منتظم} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} a^{۲} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} ۳^{۲} = \frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲}$$

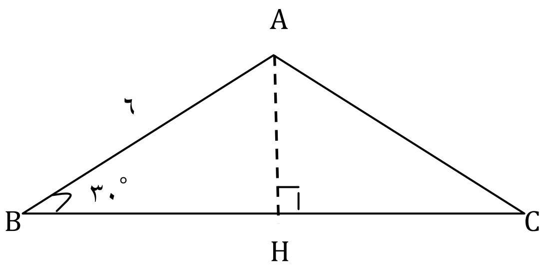
مثال : در مثلث ABC، $BC=۶, AC=۴$ و $\hat{C}=۲۵^\circ$ می باشد، با فرض $\sin ۲۵^\circ=۰/۴۲$، مساحت مثلث ABC را به دست آورید.

$$S=\frac{۱}{۲}\times CA\times CB\times \sin C=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۶\times \sin ۲۵^\circ=۱۲\times ۰/۴۲=۵/۰۴$$

مثال : مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.



حل)مثلث ABC متساوی الساقین است، بنابراین:



$$\hat{C}=\hat{B}=۳۰^\circ ,AC=AB=۶$$

ارتفاع AH را رسم می کنیم. داریم:

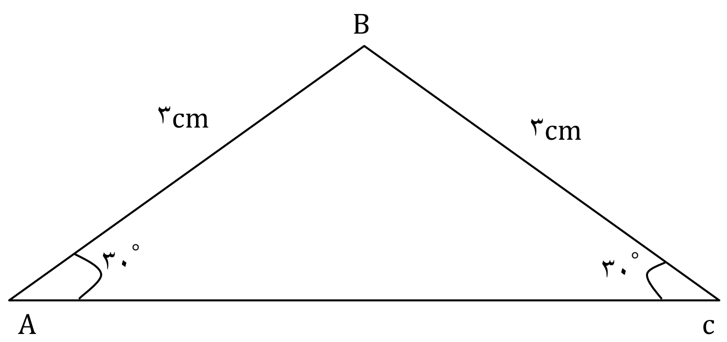
$$\overset{\Delta}{ABH}=\sin ۳۰^\circ=\frac{AH}{AB}\Longrightarrow AH=AB\times \sin ۳۰^\circ=۶\times \frac{۱}{۲}=۳$$

$$\Longrightarrow BH^۲=AB^۲-AH^۲=۳۶-۹=۲۷$$

$$\Rightarrow BH = \sqrt{۲۷} = \sqrt{۹ \times ۳} = ۳\sqrt{۳} \Rightarrow \mathrm{BC} = ۲\mathrm{BH} = ۶\sqrt{۳}$$

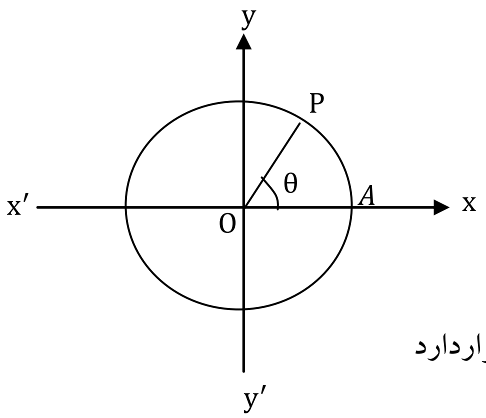
$$\Rightarrow S = \frac{AH \times BC}{۲} = \frac{۳ \times ۶\sqrt{۳}}{۲} = ۹\sqrt{۳}$$

تمرین : مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.



درس دوم: دایره مثلثاتی

دایره ی زیرکه دارای سه ویژگی است را دایره مثلثاتی گوییم.



۱- مرکزدایره در مبدأ مختصات قراردارد

۲- شعاع دایره۱ است

۳- نقطهٔ Aمبدأ حرکت برای رسم زاویه است.

قرارداد:گر نقطهٔ P روی این دایره در خلاف جهت عقربه های ساعت حرکت کند، زاویهٔ AOP مثبت و اگرحرکت در جهت عقربه های ساعت باشد، زاویه منفی است.